공부하다

박수칠 수학

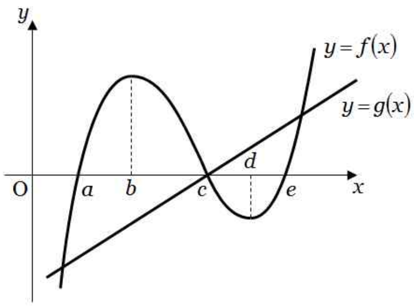
기본서

2017학년도 수능/모평 나형

미적분Ⅰ 주요 문제 해설

1 [2017학년도 6월 모평 나형 #18]

삼차함수 $y=f(x)$와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f'(b)=f'(d)=0$이다.

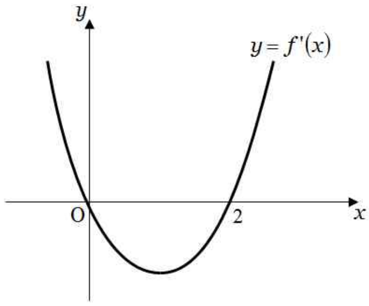


함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=p$와 $x=q$에서 극소이다. 다음 중 옳은 것은? (단, $p<q$) [4점]

① $a<p<b$이고 $c<q<d$
② $a<p<b$이고 $d<q<e$
③ $b<p<c$이고 $c<q<d$
④ $b<p<c$이고 $d<q<e$
⑤ $c<p<d$이고 $d<q<e$

2 [2017학년도 6월 모평 나형 #21]

삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.



〈보 기〉

ㄱ. $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.

ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.

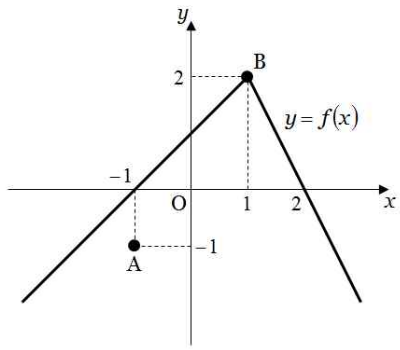
ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

3 [2017학년도 6월 모평 가형 #29]

함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x\ge 1) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 A$(-1,\ -1)$, B$(1,2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x, f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오. [4점]



4 [2017학년도 9월 모평 나형 #20]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.
> (나) $f'(-3)=f'(3)$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. [4점]

<보 기>

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.

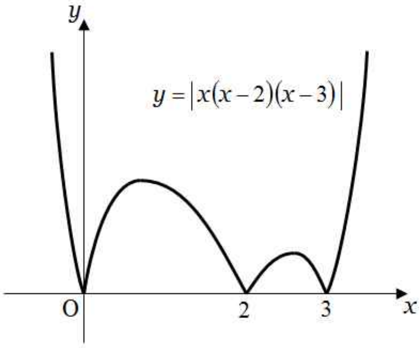
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선은 점 $(2, f(2))$를 지난다.

5 [2017학년도 수능 9월 모평 나형 #21]

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3 뿐이다.
>
> (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

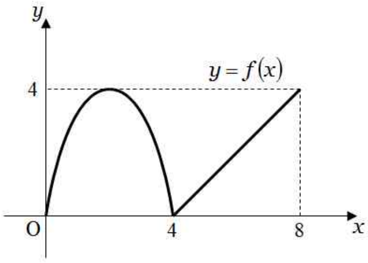


6 [2017학년도 9월 모평 나형 #29]

구간 $[0, 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 실수 $a\,(0 \le a \le 4)$에 대하여 $\displaystyle\int_a^{a+4} f(x)\,dx$의 최솟값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

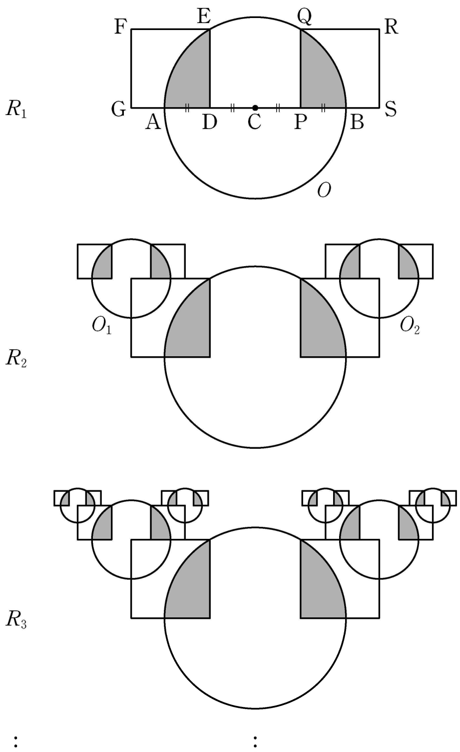


7 [2017학년도 수능 나형 #17]

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}$인 원 O_1, 점 R를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형과 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하시오. [4점]



8 [2017학년도 수능 나형 #18]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

9 [2017학년도 수능 나형 #20]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다.
>
> (나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여
>
> $$\int_0^t |f'(x)|\,dx = f(t)+f(0)$$
>
> 이다.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $\int_0^k f'(x)\,dx < 0$

ㄴ. $0 < k \le 1$

ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

10 [2017학년도 수능 나형 #30]

실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$가 닫힌 구간 $[0,1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오. [4점]

정답 및 해설

1 ②

함수 $y=f(x)g(x)$가 사차함수이므로 도함수

$$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

는 삼차함수이며, 실수 전체의 집합에서 연속이다.

그리고 문제에 주어진 그래프를 이용해서 도함수 y'의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$g'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y'	$-$		$+$	$+$	0	$-$	$-$		$+$

① $y'_{x=a}<0$, $y'_{x=b}>0$이므로 사이값 정리에 의해 $y'=0$을 만족시키는 x의 값이 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

② $y'_{x=c}=0$이고, $x=c$의 좌우에서 y'의 부호가 양수에서 음수로 변하므로 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=c$에서 극대다.

③ $y'_{x=d}<0$, $y'_{x=e}>0$이므로 사이값 정리에 의해 $y'=0$을 만족시키는 x의 값이 구간 (d,e)에 적어도 하나 존재한다.

$y'=0$은 x에 대한 삼차방정식이므로 서로 다른 실근을 최대 3개까지 가질 수 있다. 또한 ②에서 $y'=0$의 한 실근이 c이므로 ①, ③을 만족시키는 x의 값은 각각 하나씩 존재해야 한다.

①을 만족시키는 x의 값을 α로 두면 $y'_{x=\alpha}=0$이고, $x=\alpha$의 좌우에서 y'의 부호가 음수에서 양수로 변하므로 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=\alpha$에서 극소다.

마찬가지로 ③을 만족시키는 x의 값을 β로 두면 $y'_{x=\beta}=0$이고, $x=\beta$의 좌우에서 y'의 부호가 음수에서 양수로 변하므로 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=\beta$에서 극소다.

따라서 $\alpha=p$, $\beta=q$이며, $a<\alpha<b$, $d<\beta<e$로부터 다음이 성립한다.

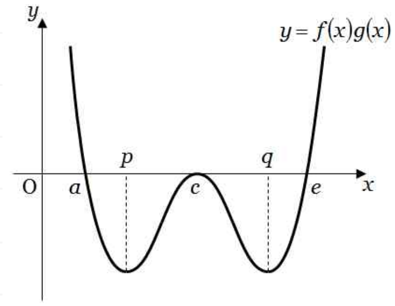
$$a<p<b\text{이고 } d<q<e$$

[다른 풀이]
삼차함수 $y=f(x)$의 x절편이 a, c, e이고, 일차함수 $y=g(x)$의 x절편이 c이므로 $f(x)$, $g(x)$를 다음과 같이 표현할 수 있다. (단, $m>0$, $n>0$)

$$f(x)=m(x-a)(x-c)(x-e),\ g(x)=n(x-c)$$

따라서 함수 $y=f(x)g(x)$의 함수식과 그래프 개형은 각각 다음과 같다.

$$f(x)g(x)=mn(x-a)(x-c)^2(x-e)$$



함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=p$, $x=q$에서 극소이고, 문제에 주어진 선지 ①~⑤ 가운데 옳은 것을 찾으려면 p, q와 b, d의 대소를 비교해야 한다. 이를 위해 문제에 주어진 조건 $f'(b)=f'(d)=0$을 이용해보자.

함수 $y=f(x)g(x)$의 도함수는

$$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

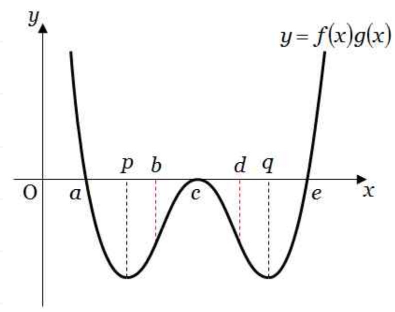
이고, 이 함수의 $x=b$, $x=d$에서의 미분계수의 부호를 계산하면 다음과 같다.

$$y'_{x=b}=f'(b)g(b)+f(b)g'(b)=f(b)\times n>0$$

$$y'_{x=d}=f'(d)g(d)+f(d)g'(d)=f(d)\times n<0$$

문제에 주어진 그래프로부터 $a<b<c$이고, $y'_{x=b}>0$로부터 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=b$에서의 접선 기울기가 양수이므로 b는 $p<b<c$를 만족시킨다.

마찬가지로 문제에 주어진 그래프로부터 $c<d<e$이고, $y'_{x=d}<0$로부터 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=d$에서의 접선 기울기가 음수이므로 d는 $c<d<q$를 만족시킨다.



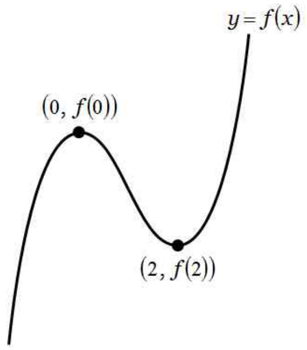
따라서 p, q가 속하는 구간은 다음과 같다.

$$a<p<b\text{이고 } d<q<e$$

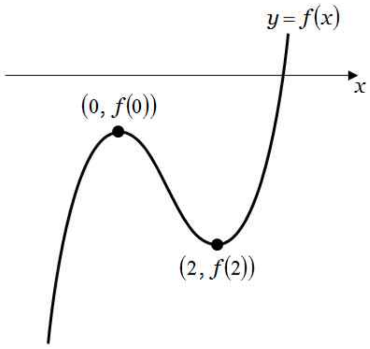
2 ㄱ, ㄴ, ㄷ

도함수 $y=f'(x)$의 그래프로부터 함수 $y=f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소임을 알 수 있다. 따라서 함수 $y=f(x)$의

그래프 개형은 다음과 같다.



ㄱ. $f(0)<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x축의 위치가 아래 그림과 같고, $f(2)<f(0)<0$이므로 $|f(0)|<|f(2)|$가 성립한다. (참)

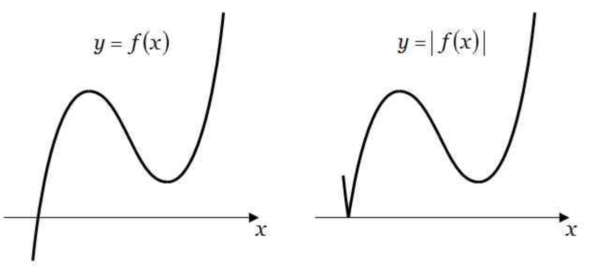


ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$가 성립하려면 다음 네 경우 가운데 하나가 성립해야 한다.

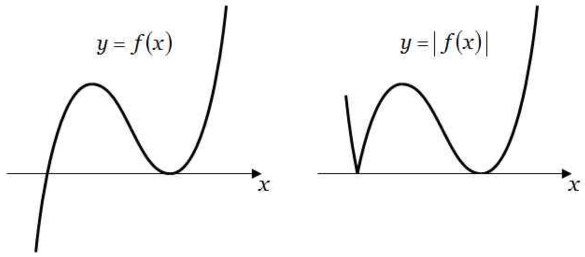
$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(2)>0 \end{cases}$ 또는 $f(2)=0$ 또는 $f(0)=0$ 또는 $\begin{cases} f(0)<0 \\ f(2)<0 \end{cases}$

각각의 경우에 해당하는 함수 $y=f(x)$의 그래프 개형을 그리고, x축 아랫부분만 x축에 대해 대칭이동시켜서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

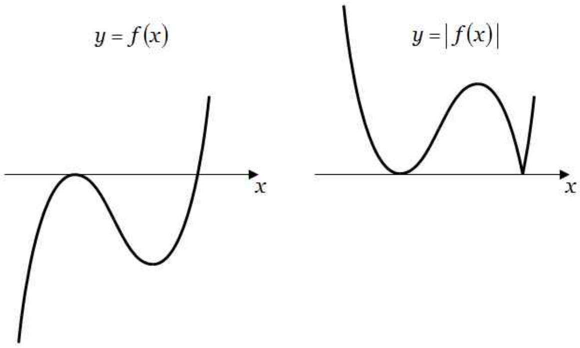
$i)$ $\begin{cases} f(0)>0 \\ f(2)>0 \end{cases}$일 때



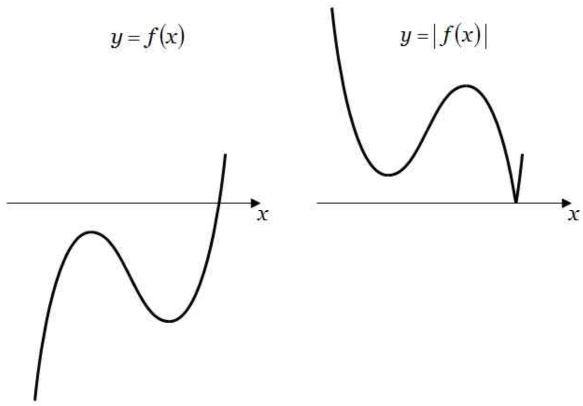
$ii)$ $f(2)=0$일 때



$iii)$ $f(0)=0$일 때



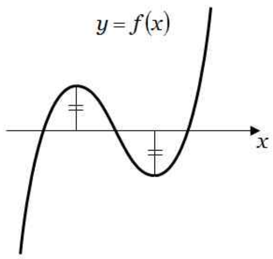
$iv)$ $\begin{cases} f(0)<0 \\ f(2)<0 \end{cases}$일 때

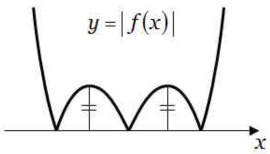


그리고 $i)$~$iv)$ 모두에서 함수 $y=|f(x)|$의 극소점이 2개임을 알 수 있다. (참)

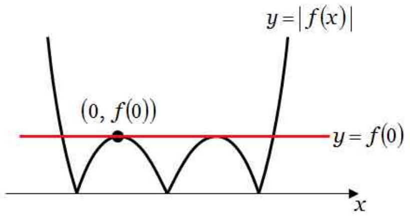
ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 함수 $y=f(x)$의 극대점 $(0, f(0))$과 극소점 $(2, f(2))$의 중점 $\left(1, \dfrac{f(0)+f(2)}{2}\right)$의 y좌표가 0이 된다.

이를 이용해서 함수 $y=f(x)$의 그래프 개형을 그리고, x축 아랫부분만 x축에 대해 대칭이동시켜서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 그리면 다음과 같다.





그리고 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 실근은 두 함수 $y=|f(x)|$와 $y=f(0)$의 교점의 x좌표이고, 아래 그림과 같이 두 함수의 교점이 4개이므로 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 실근도 4개가 된다. (참)



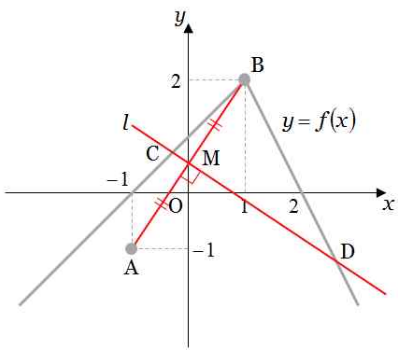
3 186

함수 $f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$를 P라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} g(x) &= (\overline{\mathrm{PA}}^2\text{과 } \overline{\mathrm{PB}}^2 \text{ 중 크지 않은 것}) \\ &= (\overline{\mathrm{PA}}\text{와 } \overline{\mathrm{PB}} \text{ 중 크지 않은 것})^2 \end{aligned}$$

그리고 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점의 자취가 $\overline{\mathrm{AB}}$의 수직이등분선이므로 $\overline{\mathrm{PA}}$와 $\overline{\mathrm{PB}}$ 가운데 어느 쪽이 큰지는 점 P가 수직이등분선의 아래쪽과 위쪽 가운데 어느 쪽에 있는지로 결정된다.

자세히 알아보기 위해 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M, $\overline{\mathrm{AB}}$의 수직이등분선을 l, l과 함수 $f(x)$의 그래프의 교점을 C, D라 하자.



여기서 점 M의 좌표는 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$,

직선 l의 방정식은 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$,

점 C의 좌표는 연립방정식 $\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2} \\ y=x+1 \end{cases}$ 의 해 $\left(-\frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right)$, 점 D의 좌표는 연립방정식 $\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2} \\ y=-2x+4 \end{cases}$ 의 해 $\left(\frac{21}{8}, -\frac{5}{4}\right)$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(x, f(x))$에 대하여

i) $x<-\frac{3}{10}$일 때

$$g(x)=\overline{\mathrm{PA}}^2=(x+1)^2+\{f(x)+1\}^2$$

이고, $f(x)=x+1$이므로

$$g(x)=2x^2+6x+5$$

ii) $-\frac{3}{10}\le x<\frac{21}{8}$일 때

$$g(x)=\overline{\mathrm{PB}}^2=(x-1)^2+\{f(x)-2\}^2$$

이고, 다시 $-\frac{3}{10}\le x<1$일 때는 $f(x)=x+1$로부터

$$g(x)=2x^2-4x+2$$

$1\le x<\frac{21}{8}$일 때는 $f(x)=-2x+4$로부터

$$g(x)=5x^2-10x+5$$

iii) $x\ge\frac{21}{8}$일 때

$$g(x)=\overline{\mathrm{PA}}^2=(x+1)^2+\{f(x)+1\}^2$$

이고, $f(x)=-2x+4$이므로

$$g(x)=5x^2-18x+26$$

i)~*iii*)의 식을 정리하면 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} 2x^2+6x+5 & \left(x<-\frac{3}{10}\right) \\ 2x^2-4x+2 & \left(-\frac{3}{10}\le x<1\right) \\ 5x^2-10x+5 & \left(1\le x<\frac{21}{8}\right) \\ 5x^2-18x+26 & \left(x\ge\frac{21}{8}\right) \end{cases}$$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 구간 $\left(-\infty, -\frac{3}{10}\right)$, $\left(-\frac{3}{10}, 1\right)$, $\left(1, \frac{21}{8}\right)$, $\left(\frac{21}{8}, \infty\right)$에서 미분가능하며, 각 구간에서의 도함수는 다음과 같다.

$$g'(x)=\begin{cases} 4x+6 & \left(x<-\dfrac{3}{10}\right) \\ 4x-4 & \left(-\dfrac{3}{10}<x<1\right) \\ 10x-10 & \left(1<x<\dfrac{21}{8}\right) \\ 10x-18 & \left(x>\dfrac{21}{8}\right) \end{cases}$$

이를 이용해서 구간 경계에서의 미분가능성을 조사하면 다음과 같다.

① $x=-\dfrac{3}{10}$에서의 미분가능성

$$(\text{좌미분계수})=\left[4x+6\right]_{x=-\frac{3}{10}}=\frac{24}{5}$$

$$(\text{우미분계수})=\left[4x-4\right]_{x=-\frac{3}{10}}=-\frac{26}{5}$$

(좌미분계수) $\neq$ (우미분계수)이므로 함수 $g(x)$는 $x=-\dfrac{3}{10}$에서 미분불가능하다.

② $x=1$에서의 미분가능성

$$(\text{좌미분계수})=\left[4x-4\right]_{x=1}=0$$

$$(\text{우미분계수})=\left[10x-10\right]_{x=1}=0$$

(좌미분계수) $=$ (우미분계수)이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

③ $x=\dfrac{21}{8}$에서의 미분가능성

$$(\text{좌미분계수})=\left[10x-10\right]_{x=\frac{21}{8}}=\frac{65}{4}$$

$$(\text{우미분계수})=\left[10x-18\right]_{x=\frac{21}{8}}=\frac{33}{4}$$

(좌미분계수) $\neq$ (우미분계수)이므로 함수 $g(x)$는 $x=\dfrac{21}{8}$에서 미분불가능하다.

①~③으로부터

$$p=-\frac{3}{10}+\frac{21}{8}\ \Rightarrow\ 80p=-24+210=186$$

4 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 조건 ㈏에서 $f'(-3)=f'(3)=k$로 두면

$$f'(-3)-k=f'(3)-k=0$$

이므로 이차식 $f'(x)-k$는 $x+3$, $x-3$을 인수로 갖는다. 따라서

$$f'(x)-k=a(x+3)(x-3)=ax^2-9a$$

$$\Rightarrow f'(x)=ax^2-9a+k$$

로 둘 수 있으며, 도함수 $f'(x)$는 $a>0$일 때 $x=0$에서 최솟값을 갖고, $a<0$일 때 $x=0$에서 최댓값을 갖는다.

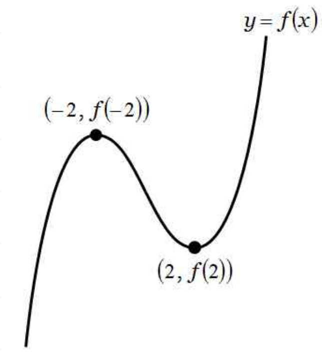
다음으로 a의 부호를 파악하기 위해 조건 ㈎를 이용해보자. $f'(-2)=0$이므로

$$f'(-2)=-5a+k=0\ \Rightarrow\ k=5a$$

$$\Rightarrow f'(x)=ax^2-4a=a(x+2)(x-2)$$

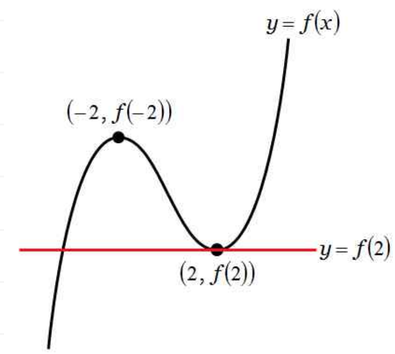
가 되고, 삼차함수 $f(x)$는 $x=-2$, 2에서 극값을 갖는다.

이때, 삼차함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값을 가지려면 그래프 개형이 아래 그림과 같아야 하므로 $a>0$이 되어야 한다.



그러므로 도함수 $f'(x)=ax^2-4a$ $(a>0)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f(2)$의 그래프 교점의 x좌표다. 그리고 다음 그림과 같이 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)



ㄷ. ㄱ에서 구했던 도함수 $f'(x)=ax^2-4a$로부터 $f'(-1)=-3a$이고, 도함수를 적분해서 얻은

$$f(x)=\frac{a}{3}x^3-4ax+C$$

로부터 $f(-1)=\dfrac{11}{3}a+C$이므로 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=-3a(x+1)+\frac{11}{3}a+C \Rightarrow y=-3ax+\frac{2}{3}a+C$$

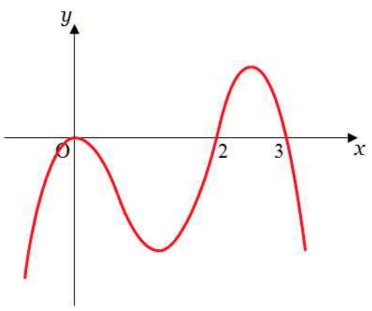
이 접선은 점 $\left(2,\ -\frac{16}{3}a+C\right)$를 지나고, $f(2)=-\frac{16}{3}a+C$ 이므로 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다. (참)

5 $\frac{4}{3}$

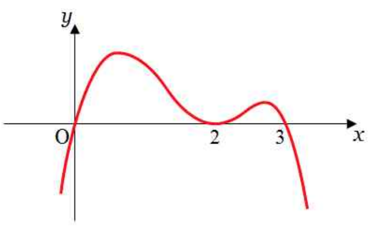
조건 ㈎로부터 사차방정식 $f(x)=0$의 실근이 $0,\ 2,\ 3$ 세 개이므로 셋 중 하나는 중근이 되어야 한다. 따라서 사차함수 $f(x)$의 그래프는 세 점 $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$ 가운데 하나에서 x축에 접한다.

그리고 $f(x)$의 최고차항 계수가 음수이므로 사차함수 $f(x)$의 그래프 개형은 다음 세 가지가 가능하다.

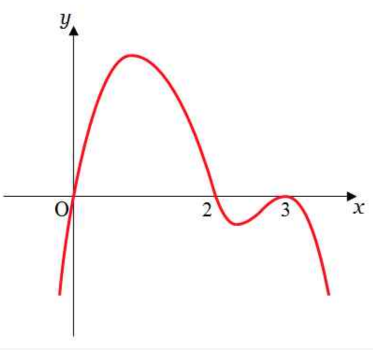
〈개형1〉 $f(x)=kx^2(x-2)(x-3)$



〈개형2〉 $f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$

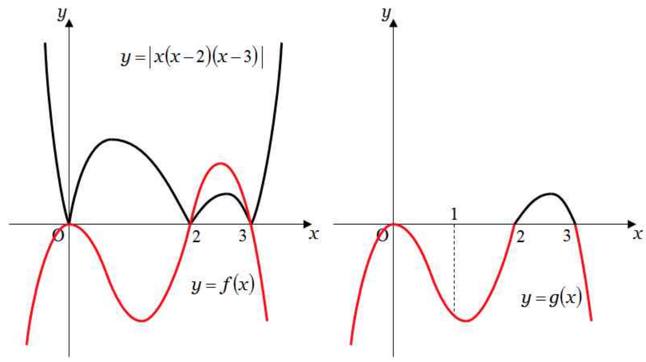


〈개형3〉 $f(x)=kx(x-2)(x-3)^2$

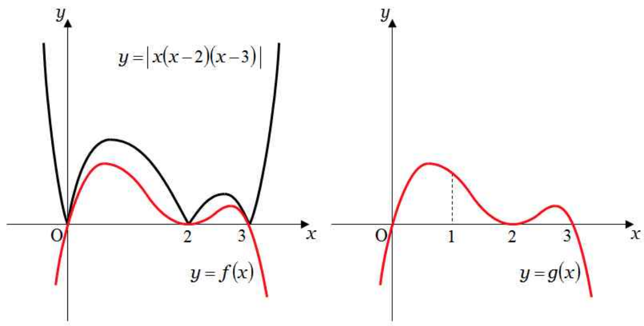


다음으로 세 개형에 함수 $y=|x(x-2)(x-3)|$의 그래프를 추가하고, 함수 $g(x)$의 그래프 개형을 조사해보자. (k값의 변화에 따른 $g(x)$의 개형 변화는 나중에 고려한다.)

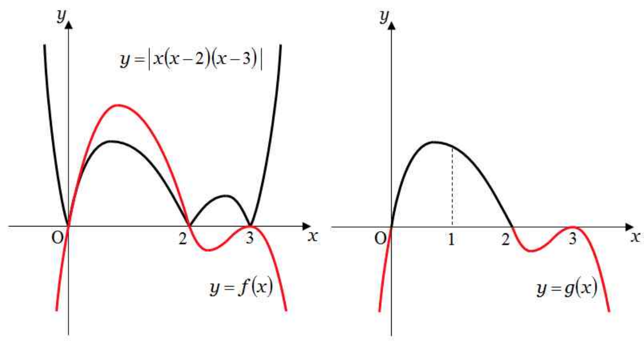
$i)$ 〈개형1〉로부터 만든 함수 $g(x)$의 그래프 개형



$ii)$ 〈개형2〉로부터 만든 함수 $g(x)$의 그래프 개형



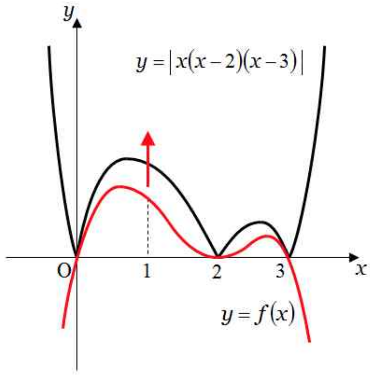
$iii)$ 〈개형3〉으로부터 만든 함수 $g(x)$의 그래프 개형



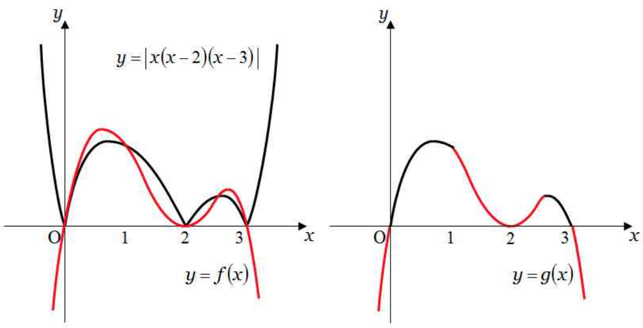
$i)$에서는 $f(1)<0$이고, $ii)$, $iii)$에서는 $f(1)>0$이므로 $f(1)$의 값이 최대이려면 함수 $f(x)$의 그래프가 〈개형2〉 또는 〈개형3〉과 같아야 한다. 그럼 $ii)$, $iii)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하고, $f(1)$이 최대가 되는 경우를 알아보자.

$ii)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하고, $f(1)$이 최대가 되는 경우

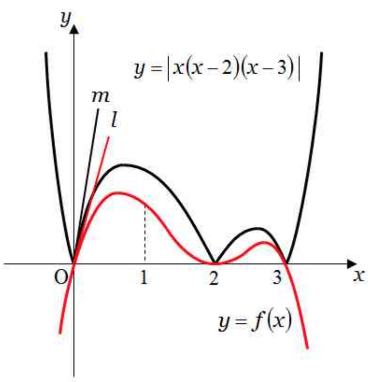
함수 $f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$에 대하여 $f(1)=-2k$의 값이 최대이려면 $|k|$의 값을 증가시키면서 구간 $(0,2)$에서의 함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림의 화살표와 같이 이동하도록 해야 한다.



그런데 아래 왼쪽 그림과 같이 구간 $(0,2)$에서 함수 $f(x)$의 그래프가 함수 $y=|x(x-2)(x-3)|$의 그래프 위쪽으로 올라가는 부분이 있으면, 아래 오른쪽 그림의 $x=0$일 때와 같이 함수 $g(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=|x(x-2)(x-3)|$의 그래프가 이어지는 점은 미분불가능하게 된다.



함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 함수 $y=x(x-2)(x-3)$의 원점에서의 접선 m과 함수 $f(x)$의 원점에서의 접선 l에 대하여 다음이 성립해야 한다.



(m의 기울기) $\geq$ (l의 기울기)

$$\boxed{\begin{aligned} &y'=(x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2) \\ &f'(x)=k(x-2)^2(x-3)+2kx(x-2)(x-3) \\ &\qquad\qquad +kx(x-2)^2 \end{aligned}}$$

$$y'_{x=0} \geq f'(0) \Rightarrow 6 \geq -12k \Rightarrow k \geq -\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

마찬가지로 $x=3$에서 미분가능하려면 함수 $y=-x(x-2)(x-3)$의 접선 기울기 $y'_{x=3}$과 함수 $f(x)$의 접선 기울기 $f'(3)$에 대하여 다음이 성립해야 한다.

$$y'_{x=3} \leq f'(3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &y'=-(x-2)(x-3)-x(x-3)-x(x-2) \\ &f'(x)=k(x-2)^2(x-3)+2kx(x-2)(x-3) \\ &\qquad\qquad +kx(x-2)^2 \end{aligned}}$$

$$-3 \leq 3k \Rightarrow k \geq -1 \quad \cdots\cdots ②$$

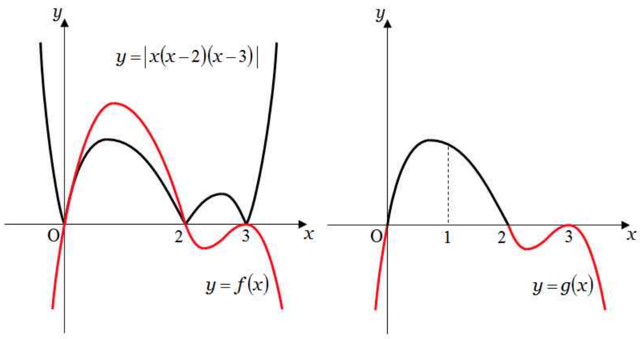
①, ②가 동시에 성립하려면 $k \geq -\frac{1}{2}$이 되어야 하고,

$$f(1)=-2k \leq 1$$

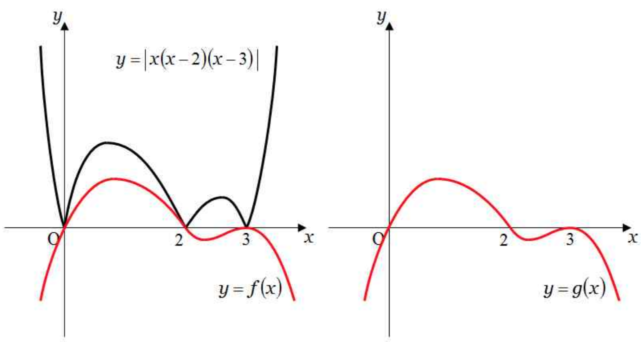
로부터 $f(1)$의 최댓값은 1이다.

iii)에서 함수 $g(x)$가 미분가능하고, $f(1)$이 최대가 되는 경우

함수 $f(x)$의 그래프 개형이 아래 왼쪽 그림과 같다면, 아래 오른쪽 그림의 $x=0$, $x=2$일 때와 같이 함수 $g(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=|x(x-2)(x-3)|$의 그래프가 이어지는 점은 미분불가능하다.



따라서 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 아래 왼쪽 그림과 같이 구간 $(0,2)$에서 함수 $y=|x(x-2)(x-3)|$의 그래프 아래쪽에 함수 $f(x)$의 그래프가 있어야 한다.



함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 함수 $y=x(x-2)(x-3)$의 접선 기울기 $y'_{x=0}$과 함수 $f(x)$의 접선 기울기 $f'(0)$에 대하여 다음이 성립해야 한다.

$y'_{x=0} \ge f'(0)$

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= (x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2) \\ f'(x) &= k(x-2)(x-3)^2+kx(x-3)^2 \\ &\qquad +2kx(x-2)(x-3) \end{aligned}}$$

$6 \ge -18k \Rightarrow k \ge -\dfrac{1}{3}$ ……③

마찬가지로 $x=2$에서 미분가능하려면 함수 $y=x(x-2)(x-3)$의 접선 기울기 $y'_{x=2}$와 함수 $f(x)$의 접선 기울기 $f'(2)$에 대하여 다음이 성립해야 한다.

$y'_{x=2} \le f'(2) \Rightarrow -2 \le 2k \Rightarrow k \ge -1$ ……④

③, ④가 동시에 성립하려면 $k \ge -\dfrac{1}{3}$이 되어야 하고,

$f(1) = -4k \le \dfrac{4}{3}$

로부터 $f(1)$의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$이다.

ii), iii)으로부터 $f(1)$의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$이다.

6 43

★미적분의 기본 정리

함수 $f(t)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $S(x)=\int_a^x f(t)\,dt$는 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하고, 그 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \text{ (단, } a<x<b)$$

$g(a)=\int_a^{a+4} f(x)\,dx$ $(0 \le a \le 4)$로 두면

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_0^{a+4} f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx \\ &= \int_{-4}^{a} f(x+4)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx \end{aligned}$$

정적분 $\int_0^{a+4} f(x)\,dx$가 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동시키면 정적분 $\int_{-4}^{a} f(x+4)\,dx$가 나타내는 도형이 된다.

가 성립한다.

그리고 함수 $f(x+4)$가 구간 $[-4, 4]$에서 연속이므로 함수 $y=\int_{-4}^a f(x+4)\,dx$가 구간 $(-4, 4)$에서 미분가능하고, 함수 $f(x)$가 구간 $[0, 8]$에서 연속이므로 함수 $y=\int_0^a f(x)\,dx$가 구간 $(0, 8)$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $g(a)$는 구간 $(0, 4)$에서 미분가능하며, 도함수 $g'(a)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} g'(a) &= f(a+4)-f(a) \\ &= [x-4]_{x=a+4} - [-x(x-4)]_{x=a} = a(a-3) \end{aligned}$$

이를 이용해서 함수 $g(a)$의 증감을 조사하면

a	0	⋯	3	⋯	4
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	최소	↗	

와 같고, 최솟값은 $g(3)$이다.

따라서

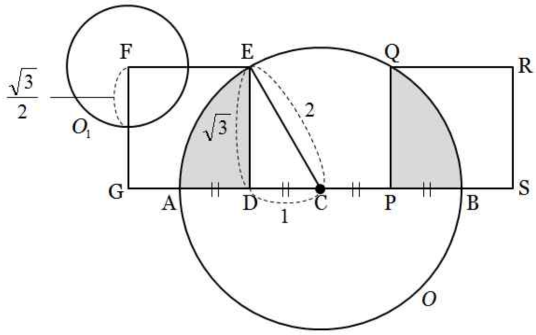
$$\begin{aligned} g(3) &= \int_3^7 f(x)\,dx \\ &= \int_3^4 (-x^2+4x)\,dx + \int_4^7 (x-4)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_3^4 + \left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^7 \\ &= \frac{37}{6} \end{aligned}$$

$\therefore p+q=43$

7 $\dfrac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$

문제에 주어진 그림에서 색칠된 도형이 원 안에 그려지므로 원끼리의 닮음비와 색칠된 도형끼리의 닮음비가 같음을 예상할 수 있다. 그리고 색칠된 도형의 개수가 변하므로 (넓이)×(개수)의 변화를 조사해야 한다.

두 번째 색칠된 도형이 그려지는 원의 반지름 길이를 구하기 위해 그림 R_1에 원 O_1을 추가해보자. 그리고 그림 R_1의 삼각형 CDE에서 $\overline{CD}=1$, $\overline{CE}=2$, $\overline{DE}=\sqrt{3}$이므로 원 O_1의 반지름은 $\dfrac{1}{2}\overline{DE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$가 된다.



따라서 원끼리의 닮음비는 $2:\frac{\sqrt{3}}{2}$, 색칠된 도형끼리의 닮음비도 $2:\frac{\sqrt{3}}{2}$, 색칠된 도형끼리의 넓이비는 $4:\frac{3}{4}=1:\frac{3}{16}$이다.

또한 첫 번째 색칠된 도형 1개의 넓이는 다음과 같다.

(부채꼴 CAE의 넓이) $-\triangle$CDE

$$=\pi\times 2^2\times\frac{60°}{360°}-\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이를 이용해서 그림 R_1, R_2, R_3, $\cdots$ 에서 추가되는 색칠된 도형의 넓이와 개수를 조사하면 다음과 같다.

넓이	개수	(넓이)×(개수)
$\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$	2	$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$
$\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{3}{16}$	2^2	$\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)\times\frac{3}{8}$
$\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\frac{3}{16}\right)^2$	2^3	$\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)\times\left(\frac{3}{8}\right)^2$
$\vdots$	$\vdots$	

$\lim_{n\to\infty}S_n$은 색칠된 모든 도형의 넓이 합을 의미하므로 위 표에서 (넓이)×(개수)부분을 모두 더한 것이며 첫째항이 $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{3}{8}$인 등비급수의 합과 같다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$$

8 4

문제에 주어진 극한

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$$

에서 좌변은 $x\to a$일 때 (분자)$\to f(a)$, (분모)$\to f(a)$이므로 $\frac{f(a)}{f(a)}$의 꼴이라 할 수 있다. 그런데 극한값은 1이 아니므로 $f(a)=0$이어야 하며, 이차식 $f(x)$는

$$f(x)=(x-a)(x+b)$$

로 표현할 수 있다.

이를 좌변에 대입하면 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+b)-(x-a)}{(x-a)(x+b)+(x-a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{x+b-1}{x+b+1}=\frac{a+b-1}{a+b+1}=\frac{3}{5}$$
$$\Rightarrow b=4-a$$

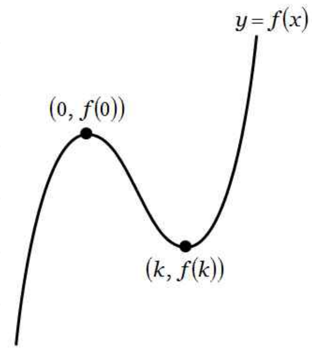
따라서 이차방정식 $f(x)=0$은

$$(x-a)(x-a+4)=0 \Rightarrow x=a \text{ 또는 } x=a-4$$

가 되고, 두 근의 차는 4이다.

9 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 조건 (가)에 의해 최고차항 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,k)$에서 감소하며, 이 구간에서 $f'(x)\le 0$이다.

$$\therefore \int_0^k f'(x)\,dx<0 \text{ (참)}$$

ㄴ. 함수 $f'(x)$가 이차함수이므로 함수 $|f'(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 함수 $y=\int_0^t |f'(x)|\,dx$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

그리고 조건 (나)에 주어진 등식의 양변을 t에 대해 미분하면

$$|f'(t)|=f'(t) \text{ (단, } t>1)$$

가 되고, $x>1$일 때 $f'(x)\ge 0$임을 알 수 있다. 따라서 삼차함수 $f(x)$는 $x>1$일 때 증가한다.

이 결과를 ㄱ에서 그렸던 함수 $f(x)$의 그래프 개형과 비교하면 $k\le 1$이 성립해야 한다. 또한 $k>0$이므로

$$0<k\le 1 \text{ (참)}$$

ㄷ. $k\le 1<t$이고, 구간 $(0,k)$에서 $f'(x)<0$, 구간 (k,∞)에서 $f'(x)>0$이므로 조건 (나)에 주어진 등식의 좌변은 다음과 같이 변형된다.

$$\int_0^t |f'(x)|\,dx$$
$$=\int_0^k\{-f'(x)\}\,dx+\int_k^t f'(x)\,dx$$
$$=\left[-f(x)\right]_0^k+\left[f(x)\right]_k^t$$
$$=f(t)-2f(k)+f(0)$$

이를 조건 (나)에 주어진 등식의 우변과 같다고 두면

$$f(t)-2f(k)+f(0)=f(t)+f(0)$$
$$f(k)=0$$

이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다. (참)

10 65

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=3x^2-6x+6$$

이고, 방정식 $4f'(x)+12x-18=f'(g(x))$에 대입해서 정리하면 다음과 같다.

$$4(3x^2-6x+6)+12x-18=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6$$
$$4x^2-4x=\{g(x)\}^2-2g(x)$$
$$(2x-1)^2-1=\{g(x)-1\}^2-1$$
$$(2x-1)^2=\{g(x)-1\}^2$$
$$2x-1=g(x)-1 \text{ 또는 } 2x-1=-g(x)+1$$
$$g(x)=2x \text{ 또는 } g(x)=-2x+2$$

$i)$ 방정식 $g(x)=2x$가 구간 $[0,1]$에서 실근을 가질 조건

함수 $g(x)$의 역함수가 함수 $f(x)$이므로 방정식 $g(x)=2x$의 해는 방정식 $f(2x)=x$의 해와 같고, 방정식 $f(2x)=x$를 변형하면 다음과 같다.

$$(2x)^3-3(2x)^2+6(2x)+k=x$$
$$8x^3-12x^2+11x=-k$$

따라서 방정식 $f(2x)=x$가 실근을 가지려면 곡선 $y=8x^3-12x^2+11x$와 직선 $y=-k$가 구간 $[0,1]$에서 만나야 한다.

함수 $y=8x^3-12x^2+11x$의 도함수가

$$y'=24x^2-24x+11$$

이고, $D/4=(-12)^2-24\times11<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $y'>0$이고, 함수 $y=8x^3-12x^2+11x$는 증가함수다. 그리고 $x=0$일 때 $y=0$, $x=1$일 때 $y=7$이므로 구간 $[0,1]$에서 $0\le y\le7$이 성립한다.

그러므로 방정식 $8x^3-12x^2+11x=-k$이 실근을 가지려면 다음이 성립해야 한다.

$$0\le-k\le7 \Rightarrow -7\le k\le0$$

$ii)$ 방정식 $g(x)=-2x+2$가 구간 $[0,1]$에서 실근을 가질 조건

방정식 $g(x)=-2x+2$의 해는 방정식 $f(-2x+2)=x$의 해와 같고, 방정식 $f(-2x+2)=x$를 변형하면 다음과 같다.

$$(-2x+2)^3-3(-2x+2)^2+6(-2x+2)+k=x$$
$$8x^3-12x^2+13x-8=-k$$

따라서 방정식 $f(-2x+2)=x$가 실근을 가지려면 곡선 $y=8x^3-12x^2+13x-8$와 직선 $y=-k$가 구간 $[0,1]$에서 만나야 한다.

함수 $y=8x^3-12x^2+13x-8$의 도함수가

$$y'=24x^2-24x+13$$

이고, $D/4=(-12)^2-24\times13<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $y'>0$이고, 함수 $y=8x^3-12x^2+13x-8$은 증가함수다. 그리고 $x=0$일 때 $y=-8$, $x=1$일 때 $y=1$이므로 구간 $[0,1]$에서 $-8\le y\le1$이 성립한다.

그러므로 방정식 $8x^3-12x^2+11x=-k$이 실근을 가지려면 다음이 성립해야 한다.

$$-8\le-k\le1 \Rightarrow -1\le k\le8$$

$i)$, $ii)$로부터 방정식 $4f'(x)+12x-18=f'(g(x))$이 실근을 갖도록 하는 k의 범위가 $-8\le k\le1$이므로

$$m^2+M^2=(-8)^2+1^2=65$$