제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$$2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = 2^2 = 4$$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x) = x^3 - x^2 + C$

$f(1) = 1 \quad \therefore C = 1$

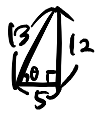
$f(2) = 8 - 4 + 1 = 5$

3. $\boxed{\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi}$인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

$\rightarrow \sin\theta < 0,\ \cos\theta < 0,\ \tan\theta > 0$

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

$\tan\theta = \frac{12}{5}$

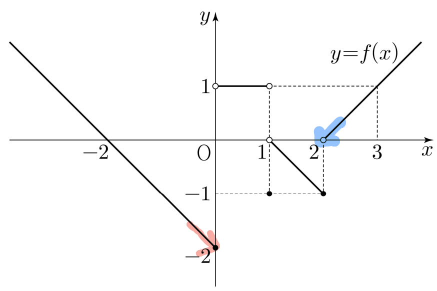


$\Rightarrow \sin\theta = -\frac{12}{13},$

$\cos\theta = -\frac{5}{13}$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = -\frac{17}{13}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

-2 0

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\therefore (-2) + 0 = -2$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left(x^2+3\right)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+4f'(1)=2\times2+4\times1=4+4=8$

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3x^2-6x=3x(x-2)$

$\therefore \frac{3}{6}(2-0)^3=\frac{1}{2}\times8=4$

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6=2(S_3-S_2)$$ $a_6=2a_3$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$2+5d=2(2+2d)$

$2+5d=4+4d$ $d=2$, $S_{10}=\frac{10(4+18)}{2}$

$=10\times11=110$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x\geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

✓

$(-2a+6)^2=a^2$

$4a^2-24a+36=a^2$

$3a^2-24a+36=0$

$a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0 \Rightarrow a=2,\ a=6 \quad \therefore 2+6=8$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

$\rightarrow a_1=4,\ a_4=\frac{1}{2} \quad \therefore a_1+a_4=\frac{9}{2}$

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

✓

$a_{12} \rightarrow a_{11} \rightarrow a_{10} \rightarrow a_9 \rightarrow a_8$

$\boxed{\frac{1}{2}} \quad 2 \quad \frac{1}{4} \quad 4 \quad \boxed{\frac{1}{2}}$ 반복

$a_8 \rightarrow a_7 \rightarrow a_6 \rightarrow a_5$

$a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$

10. $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x, \quad y=-\log_n(x+3)+1$$

$\mapsto \alpha$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

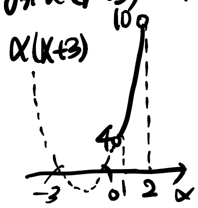
$1<\alpha<2$

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

✓

$\log_n x=-\log_n(x+3)+1$

$\log_n x(x+3)=1 \quad \therefore x(x+3)=n$



$4<n<10$

$\Rightarrow 5\sim9$까지의 합

$\therefore 5+6+7+8+9=35$

11. 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

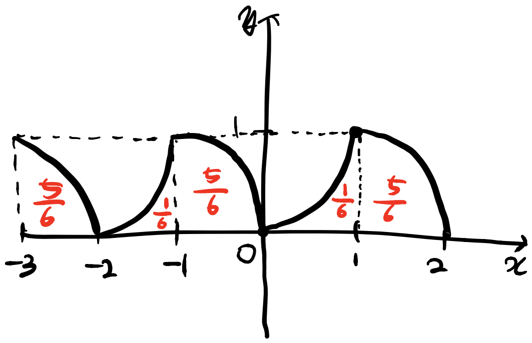
$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ✓② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

* 대충개형잡기



$\int_{-3}^{2} g(x)dx = 1+1+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$

*수식풀이

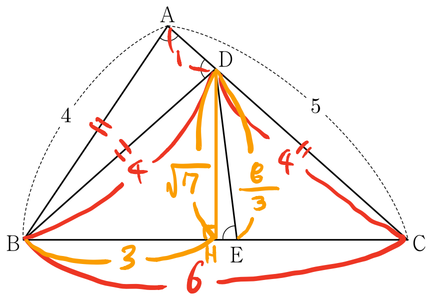
$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6},\quad \int_{-1}^{0}\{-f(x+1)+1\}dx=-\int_0^1 f(x)dx+1$
$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

$\int_{-3}^{2} g(x)dx=\int_{-3}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$
$=1+1+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ✓③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

$\angle BAC=\angle BDA$이므로 $\overline{BD}=\overline{AB}=4$, $\cos(\angle BAC)=\cos(\angle BDA)=\frac{1}{8}$

$\therefore \overline{DA}=2\times\frac{1}{2}=1$이므로 $\overline{DC}=4$ $\therefore \overline{BD}=\overline{DC}$이므로 $\triangle BDC$는 이등변삼각형

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의해 $\overline{BC}^2=25+16-2\times5\times4\times\frac{1}{8}=36$

$\therefore \overline{BC}=6$, 점 D에서 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle BDH$는 직각삼각형이 되고 이등변삼각형의 수선은 수직이등분선

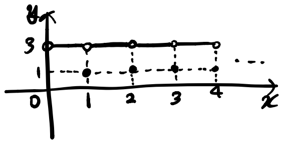
$\Rightarrow \overline{BH}=3$, DH는 피타고라스 정리에 의해서 $\overline{DH}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

$\cos(\angle BAC)=\cos(\angle BED)=\frac{1}{8}$이므로 $\sin(\angle BED)=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\therefore \overline{DE}=\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{8}{3}$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x) = \begin{cases} 3 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$



이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x)$를 만족시킨다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

$\sqrt{k}$가 정수로 나오는 경우에는 $f(\sqrt{k})=1$, 나머지는 모두 3

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3} = \frac{1}{3}+2+3+\frac{4}{3}+5+6+7+8+\frac{9}{3}+10+11$
$+12+13+14+15+\frac{16}{3}+17+18+19+20$

$= \dfrac{20\cdot 21}{2} - 1 - 4 - 9 - 16 + \dfrac{30}{3}$

$= 210 - 30 + 10$

$= 190$

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

$g(x) = \begin{cases} |f(x-p)+q| & (x>0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$

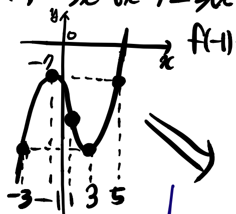
> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x) = |xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

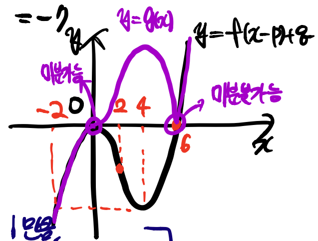
$f(x)$는 미분점이 무조건 하나 생기므로 $f(0)=0$이 되도록 하면 1개로 조정됨 ($x=0$ 기준으로 $+-$ 변경)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

$f(-1) = -1-3+9-12$
$= -7$

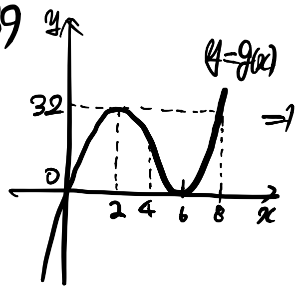




x축의 방향으로 1만큼,
y축의 방향으로 7만큼 평행이동 → $p=1$, $q=7$ $\therefore p+q=1+7=8$

* 이런 경우는 안되는가?

$f(3) = -39$



⇒ 미분점이 생기지 않음
⇒ out.

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

sin과 cos의 주기가 4

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

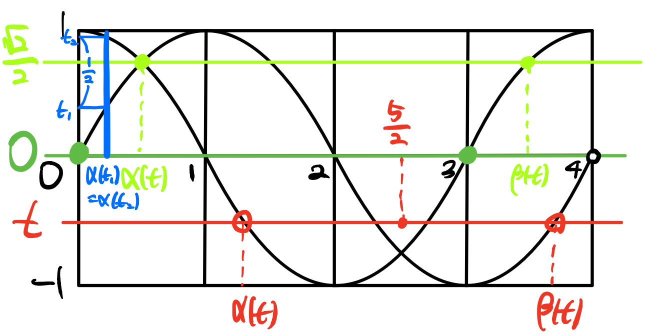
<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다. O

ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ O

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다. X

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ. $\alpha(t) + \beta(t) = 2 \times \frac{5}{2} = 5$ (참)

ㄴ. 대칭, 상대적위치 동일 ⇒ $0 \sim \frac{\sqrt{2}}{2}$까지 3으로 일정하게 유지 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이후 cos그래프로 $\alpha(t)$가 이동하면서 경향성이 깨짐 ⇒ $\left\{t \mid 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ (참)

ㄷ. $\sin\alpha(t_1) = \sin\alpha(t_2) = t_1$

$\cos\alpha(t_2) = \cos\alpha(t_1) = t_2$

$\Rightarrow \sin^2\alpha(t_1) + \cos^2\alpha(t_1) = t_1^2 + t_2^2 = 1$

$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_2^2 - 2t_1t_2 + t_1^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore 2t_1t_2 = \frac{3}{4}$ $\therefore t_1t_2 = \frac{3}{8}$ (거짓)

단답형

16. $\log_4\frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{2}$

$\log_4 \frac{2}{3} \times 24 = \log_4 16 = 2$

17. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 12$가 $x = a$에서 극소일 때, $a + f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$\boxed{11}$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$x = 1$에서 $- \rightarrow +$ $\therefore a = 1$

$1 - 3 + 12 = 10$ $\therefore a + f(a) = 1 + 10 = 11$

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 36, \quad a_7 = \frac{1}{3}a_5 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{3}$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{4}$

$a_6 = a_2 r^4 = 36 \times \frac{1}{9} = 4$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

위치 $x(t) = t^3 - 2t^2 + kt$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

$1-2+k=-3 \quad \therefore k=-2$

$\boxed{6}$

$\int_1^3 (3t^2-4t-2)\,dt = x(3)-x(1)$

$= 27-18-6-1+2+2$

$= 6$

20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$
$= 3(x-3)(x-5)$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\boxed{8}$

$g(x) = \int_a^x f(x)\{f(t)\}^4 - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$

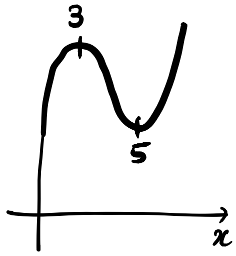
$= f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$

$g'(x) = f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 + \{f(x)\}^5 - \{f(x)\}^5 = f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4$

>0

$x>0 \to +$

$x<0 \to -$



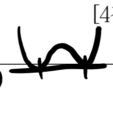
f'의 하나의 극값

⇒ 3 또는 5는 제거

⇒ $a=3$ or $a=5$

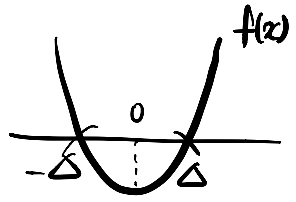
$\therefore 3+5=8$

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]



(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

⇓ f(x)는 두실근필수 & 최솟값 정수



$\boxed{24}$

⇒ n이 홀수이면 (가) 또는 (나) 성립 X

$x^2+\square$ 꼴이므로 ⇒ $\square$가 음의정수이면됨

⇒ 따라서 $(x-\triangle)(x+\triangle)$ 꼴일때 $\triangle$가 정수이거나 루트제곱까지는 허용됨.

⇒ $x^n=64 = 2^6$ ~> $n=2$일때 $x=\pm 8$ ⇒ $f(x)=(x-8)(x+8)$

$n=4$일때 $x=\pm 2^{\frac{3}{2}}$ ⇒ $f(x)=(x-2^{\frac{3}{2}})(x+2^{\frac{3}{2}})$

$n=6$일때 $x=\pm 2$ ⇒ $f(x)=(x-2)(x+2)$

$n=12$일때 $x=\pm 2^{\frac{1}{2}}$ ⇒ $f(x)=(x-2^{\frac{1}{2}})(x+2^{\frac{1}{2}})$

$\therefore 2+4+6+12=24$

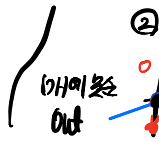
22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

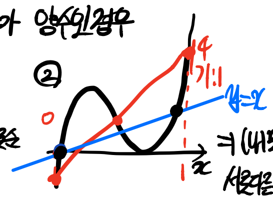
(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

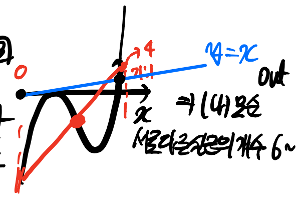
$\boxed{61}$

i) 최고차항의 계수가 양수인경우

① 

② 

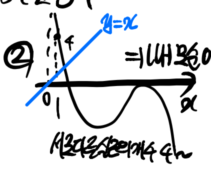
⇒ (나) 모순 Out
서로다른실근의개수 6~

③ 

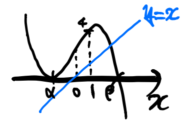
Out
⇒ (나) 모순
서로다른실근의개수 6~

ii) 최고차항의 계수가 음수인경우

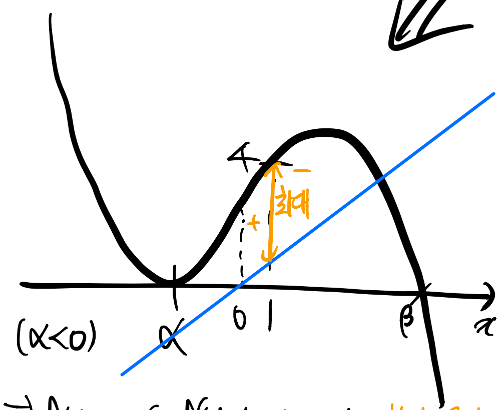
① 

② 

⇒ (나) 모순 Out
서로다른실근의개수 4~

☆ ③ 

$-\infty \to \beta \to 1 \to 0 \to \infty$
α 1개 최대=α β 1개
⇒ 3개가능



⇒ $f(x)-x \to f'(x)-1=0$ $x=1$ ⇒ 차이 $4-1=3$ ⇒ $\alpha=-3$

⇒ $f(x)=a(x+3)^2(x-\beta)$ $(a<0)$, $f'(x)=2a(x+3)(x-\beta)+a(x+3)^2$

$f'(1)=8a(1-\beta)+16a=1$, $f(1)=16a(1-\beta)=4$.

⇒ $2+16a=1$ $\therefore a=-\frac{1}{16}$, $\beta-1=4$ $\therefore \beta=5$, $f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$

$\therefore f(0)=\frac{45}{16}$

$\therefore p+q=16+45=61$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [2점]

① 20 ② 40 ③ 60 ④ 80 ⑤ 100

$_5C_3 \times 2^3 = 10 \times 8 = 80$

24. 어느 동아리의 학생 20명을 대상으로 진로활동 A와 진로활동 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 진로활동 A와 진로활동 B 중 하나를 선택하였고, 각각의 진로활동을 선택한 학생 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	진로활동 A	진로활동 B	합계
1학년	7	5	12
2학년	4	4	8
합계	11	9	20

$\frac{5}{9}$

이 조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 1학년일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 3500보다 클 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{11}{25}$　④ $\frac{12}{25}$　⑤ $\frac{13}{25}$

$35\_\_ \Rightarrow 5^2$

$4\_\_\_ \Rightarrow 5^3$

$5\_\_\_ \Rightarrow 5^3$

$\frac{5^2+5^3+5^3}{5^4} = \frac{1+5+5}{25} = \frac{11}{25}$

26. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 78　② 84　③ 90　④ 96　⑤ 102

A B C

빨파노

⇓

A or B or C (⇒×3)

A.B.C 선택

빨간색

파란색

$3 \times {}_3H_3 \times {}_3H_1 = 3 \times {}_5C_3 \times {}_3C_1$

$= 3 \times 10 \times 3 = 90$

27. 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? [3점]

$1 \le \square \le 4$

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{96}$ ③ $\frac{11}{192}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{13}{192}$

$$\left.\begin{array}{l}(1,1) \Rightarrow {}_4C_1 = 4 \\ (1,2) \Rightarrow {}_4C_2 = 6 \\ (2,1) \Rightarrow {}_4C_2 = 6 \\ (1,3) \Rightarrow {}_4C_3 = 4 \\ (3,1) \Rightarrow {}_4C_3 = 4 \\ (1,4) \Rightarrow {}_4C_4 = 1 \\ (4,1) \Rightarrow {}_4C_4 = 1 \\ (2,2) \Rightarrow {}_4C_4 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{27}{6^2 \times 2^4} = \frac{3}{64}$$

28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

$(2.2.0.0) \Rightarrow 1\times1\times3\times3\times6=54$

$(1.3.0.0) \Rightarrow 1\times1\times3\times3\times12=108$

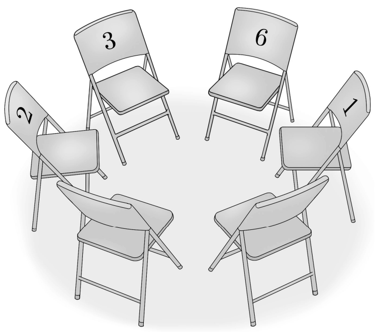
$(1.1.1.1) \Rightarrow 1\times1\times1\times1=1$

$(1.2.1.0) \Rightarrow 1\times1\times3\times12=36$

$\therefore 54+108+1+36=199$

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



$\boxed{48}$

여사건 → 곱이 12가 되는 경우 / 전체 $5!=120$

① 2&6

(나머지 배치)

$2\times4!=48$

(2&6 자리바꿈)

② 3&4

(나머지 배치)

$2\times4!=48$

(3&4 자리바꿈)

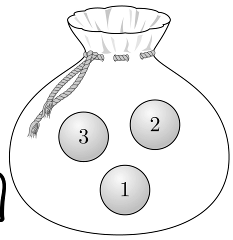
③ 2&6 ∩ 3&4

$\underbrace{2}_{(2\&6)}\times\underbrace{2}_{(3\&4)}\times\underbrace{3}_{\text{자리}}\times\underbrace{2}_{\text{4개 배치}}=24$

$\therefore 48+48-24=72$

$\therefore 120-72=48$

30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$\boxed{47}$

여사건 → $1-\square$

① 2가 없을 때 ② 3이 없을 때 ③ 2와 3이 모두 없을 때

$\left(\frac{2}{3}\right)^5$ $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ $\left(\frac{1}{3}\right)^5$

$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^5+\left(\frac{2}{3}\right)^5-\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{63}{243}=\frac{7}{27}$

$\therefore 1-\frac{7}{27}=\frac{20}{27}$ $\therefore p=27,\ q=20$

$\therefore p+q=27+20=47$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)(\sqrt{n^2+n+1}+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}$$

$$=\frac{1+1}{1}=2$$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\quad y=\sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

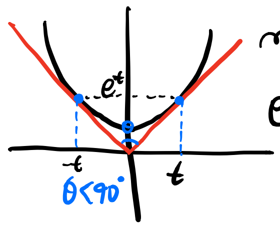
① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{e^t-\sin t}\Bigg|_{t=0}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-0}$$

$$=1$$

25. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$ ④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1



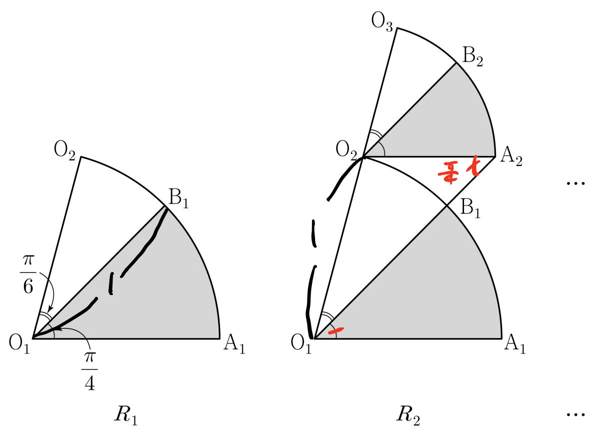
$\Rightarrow \tan\theta = \frac{-e-e}{1-e^2} = \frac{2e}{e^2-1}$

$e^t - e$

$\frac{e^t}{t} = e^t \Rightarrow t=1$

(기울기=미분계수)

26. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 A_1O_2 위에 점 B_1을 $\angle A_1O_1B_1 = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 O_1A_1에 평행한 직선이 직선 O_1B_1과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2를 $\angle A_2O_2B_2 = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

첫째항: $\frac{1}{2}\times 1^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

$\triangle O_1A_2O_2 \Rightarrow$ 사인법칙. $\overline{O_2A_2} \,//\, \overline{O_1A_1} \Rightarrow$ 엇각 동일 $(\angle A_1O_1A_2 = \angle O_1A_2O_2)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}}$ $\therefore \overline{O_2A_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore 1 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ 공비

$\therefore \frac{\frac{\pi}{8}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$

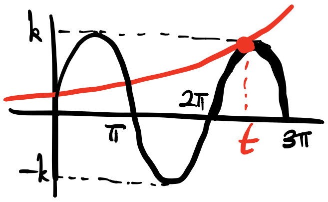
27. 두 함수

$$f(x)=e^{x}, \quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

f, g 하나 접한다

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$ ④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$



함숫값: $e^{t}=k\sin t$

미분계수: $e^{t}=k\cos t$

$\Rightarrow \sin t=\cos t$

$2\pi<t<\frac{5}{2}\pi$

$\Rightarrow t=\frac{9}{4}\pi$

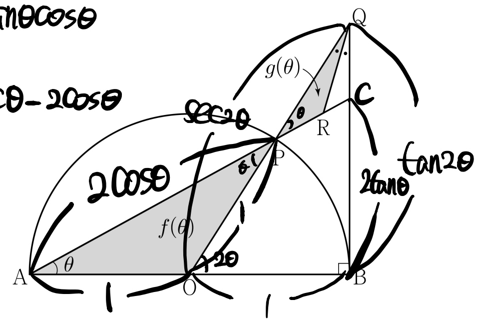
$\therefore e^{\frac{9}{4}\pi}=k\times\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, ∠OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. ∠OAP $=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^{4}\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]

$f(\theta)=\sin\theta\cos\theta$

$\overline{PC}=2\sec\theta-2\cos\theta$



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

* 각의 이등분선

$\frac{1}{2}(2\theta)^{2}=2\theta^{2}$

$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^{2}\theta}-2\tan\theta=2\tan\theta\left(\frac{\tan^{2}\theta}{1-\tan^{2}\theta}\right)=\frac{2\tan^{3}\theta}{1-\tan^{2}\theta}$

$\overline{QP}:\overline{QC}=(\sec2\theta-1):(\tan2\theta-2\tan\theta)$

$\Rightarrow \overline{PR}=\frac{\sec2\theta-1}{(\sec2\theta-1)+(\tan2\theta-2\tan\theta)}\times(2\sec\theta-2\cos\theta)$

$\frac{2(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\cos\theta}$

$\frac{2\theta^{2}}{2\theta^{2}+2\theta^{3}}\times4\times\frac{1}{2}\theta^{2}=\frac{2\theta^{4}}{\theta^{2}(1+\theta)}=2\theta^{2}$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{QP}\times\overline{PR}\times\sin\theta$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^{4}\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times2\theta^{2}\times2\theta^{2}\times\theta}{\theta^{4}\times\theta}=2$

단답형

29. $t>2e$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$ 이 $x=k$ 에서 극대일 때, 실수 k 의 값을 $g(t)$ 라 하면 $g(t)$ 는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$ 인 실수 α 에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f'(x)=\frac{2t\ln x}{x}-2x$ $\boxed{17}$

$f'(k)=\frac{2t\ln k}{k}-2k=0$

$\frac{2\alpha\ln g(\alpha)}{g(\alpha)}-2g(\alpha)=0$ $\therefore 2\alpha\times 2=2e^4$ $\therefore \alpha=\frac{e^4}{2}$

$t\ln g(t)=\{g(t)\}^2$

$\ln g(t)+\frac{tg'(t)}{g(t)}=2g(t)g'(t)$

$\ln e^2+\frac{\frac{e^4}{2}g'(\frac{e^4}{2})}{e^2}=2\times e^2\times g'(\frac{e^4}{2})$

$2+\frac{e^2}{2}g'(\frac{e^4}{2})=2e^2g'(\frac{e^4}{2})$

$\frac{3}{2}e^2g'(\frac{e^4}{2})=2$ $\therefore g'(\frac{e^4}{2})=\frac{4}{3e^2}$

$\therefore \alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{e^4}{2}\times\frac{16}{9e^4}$

$=\frac{8}{9}$

$\therefore p=9,\ q=8$ $\therefore 9+8=17$

30. $t>\frac{1}{2}\ln 2$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$ 과 직선 $y=x+t$ 가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\alpha.\beta$

$x+t=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$ $\boxed{11}$

$e^{x+t}=1+e^{2x}-e^{-2t}$

$e^{2x}-e^t\times e^x-e^{-2t}+1=0$

$(e^x-e^{-t})(e^x-e^t+e^{-t})=0$

$\rightsquigarrow \alpha=-t.\ \beta=\ln(e^t-e^{-t})$

$\Rightarrow y=x+t$ $\cancel{(기울기 1)}$ $\Rightarrow \sqrt{2}\times|\beta-\alpha|=f(t)$

$\therefore f(t)=\sqrt{2}\{\ln(e^t-e^{-t})+t\}$

$f'(t)=\sqrt{2}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}+1\right)$

$\therefore f'(\ln 2)=\sqrt{2}\left(\frac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}+1\right)$

$=\sqrt{2}\left(\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}+1\right)=\sqrt{2}\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}\sqrt{2}$

$\therefore p=3,\ q=8$

$\therefore p+q=3+8=11$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(k+3,\ 3k-1)$과 $\vec{b}=(1,\ 1)$이 서로 평행할 때, 실수 k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$k+3=3k-1$

$\therefore k=2$

24. 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

$\frac{2x}{8}+\frac{\sqrt{2}y}{4}=1$

$\frac{2}{8}x=1 \quad \therefore x=4$

25. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 2), B(−3, 5)에 대하여

$$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}| = 5$$

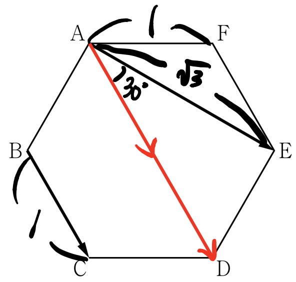
P 반지름5 원의둘레

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는?
(단, O는 원점이다.) [3점]

↳ 10π

① 10π ② 12π ③ 14π ④ 16π ⑤ 18π

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}|$의 값은? [3점]

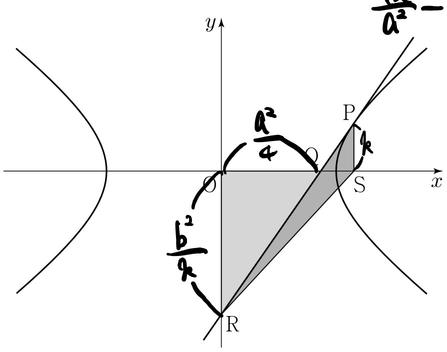


① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

$$|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AE}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\frac{\pi}{6}$$
$$= 3 + 1 + 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 3 + 1 + 3 = 7$$
$$\therefore |\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}| = \sqrt{7}$$

27. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P$(4,\ k)\ (k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. 점 S$(4,\ 0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자. $A_1 : A_2 = 9:4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.) [3점]

$\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$



① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

$A_1=\frac{1}{2}\times\frac{a^2}{4}\times\frac{b^2}{k}=\frac{a^2b^2}{8k}$

$A_2=\frac{1}{2}\times4\times k=2k$

$\frac{a^2b^2}{8k}:2k=9:4 \qquad 9k=\frac{a^2b^2}{4k}$

$36k^2=a^2b^2 \qquad (4,k)\overset{대입}{\Rightarrow}\frac{16}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}=1$

$\frac{576}{a^2}-36=a^2 \qquad k^2=\frac{16b^2}{a^2}-b^2$

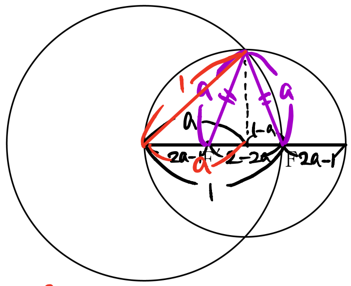
a^4+36a^2-576

$(a^2-12)(a^2+48)=0 \qquad \therefore a^2=12$

$\therefore a=2\sqrt{3}\Rightarrow$ 주축의 길이 $2a=4\sqrt{3}$

28. 두 초점이 F, F$'$이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ ③ $\sqrt{3}-1$ ④ $2\sqrt{2}-2$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$



$(\sqrt{1-a^2})^2+(1-a)^2=a^2$

$1-a^2+1-2a+a^2=a^2$

$a^2+2a-2=0$

$a=-1\pm\sqrt{1+2}$

$=\sqrt{3}-1 \ (\because a>0)$

단답형

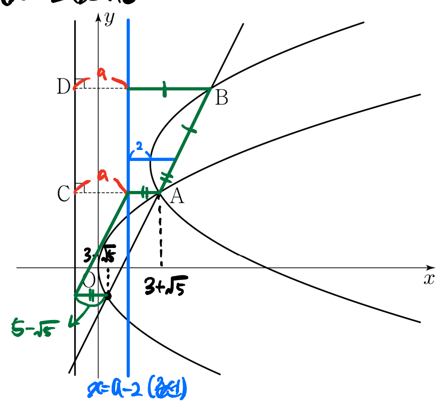
29. 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]

$y^2=4\cdot 2x$

$8x=4x^2-16x+16$ $\quad x^2-6x+4=0$

$4x^2-24x+16=0$ $\quad x=3\pm\sqrt{5}$

$\boxed{80}$



$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=2a=k$

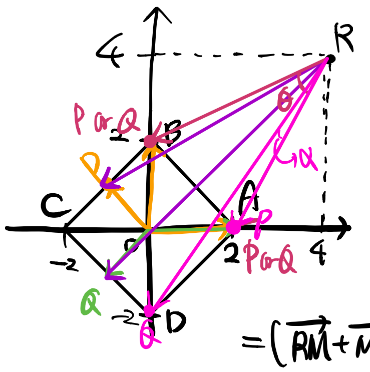
$5+\sqrt{5}=5-\sqrt{5}+a$ $\quad\therefore a=2\sqrt{5}$

$\therefore k=4\sqrt{5}$ $\quad\therefore k^2=80$

30. 좌표평면 위의 네 점 A$(2,\ 0)$, B$(0,\ 2)$, C$(-2,\ 0)$, D$(0,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD})=0$ ⇒ $\overline{PQ}\parallel\overline{AB}$, $\overline{PQ}\perp\overline{AD}$ or $\overline{PQ}\perp\overline{AB}$, $\overline{PQ}\parallel\overline{AD}$
>
> (나) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geq 0$이다.
>
> (다) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}\geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}\leq 0$이다.

점 R$(4,\ 4)$에 대하여 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



$\boxed{48}$

$\overline{PQ}$의 중점은 M

⇒ $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$

$=(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP})\cdot(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MQ})$ 역벡터합 0

$=|\overrightarrow{RM}|^2+(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ})\cdot\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$

$=|\overrightarrow{RM}|^2-|\overrightarrow{MP}|^2=|\overrightarrow{RM}|^2-2$ $\quad |\overrightarrow{MP}|^2$

최대 → 최대 M(1, −1)

최소 → 최소 M(1, 1)

$\cos\alpha=\dfrac{20+52-8}{2\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{13}}=\dfrac{8}{\sqrt{65}}$

최대 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=2\sqrt{5}\times 2\sqrt{13}\times\dfrac{8}{\sqrt{65}}$

$=32$

$\cos\theta=\dfrac{20+20-8}{2\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$

최소 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\dfrac{4}{5}$

$=16$

$\therefore 32+16=48$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.