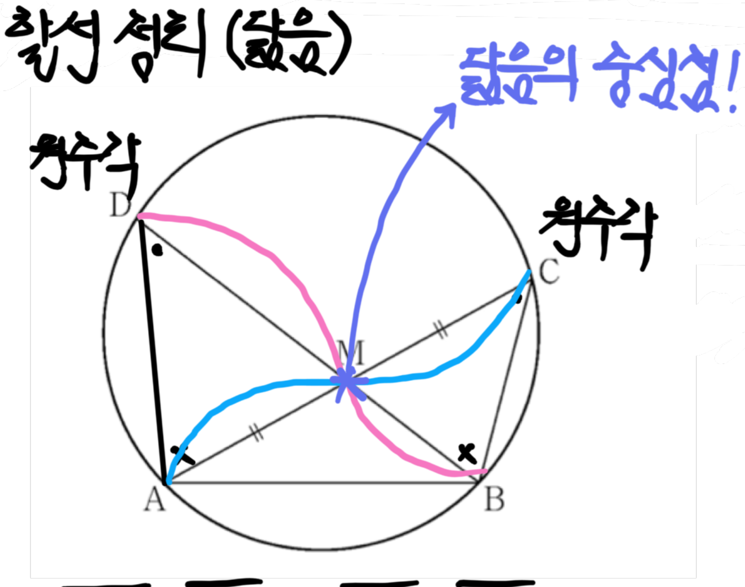
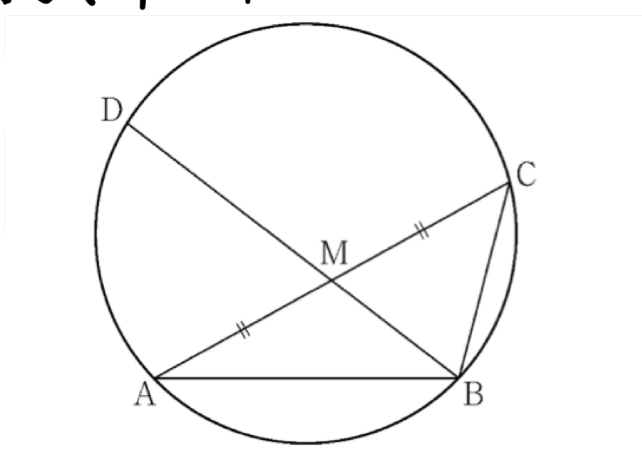
① 할선정리 (닮음)



$\overline{MD}\cdot\overline{MB}=\overline{MA}\cdot\overline{MC}$

② 중선정리 (파푸스)



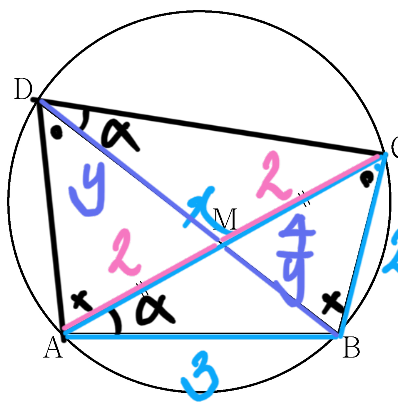
$\overline{BA}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\|}{\overline{CM}^2}$

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 코사인 law 조건!

$\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]

α



by 할선정리

① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$　② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$　③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$　⑤ $\sqrt{10}$

코사인 law in $\triangle ABC$

$\overline{AC}=x$ (단, $x>3$)라 할 때

$4=9+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\frac{7}{8}$

$4x^2-21x+20=0$

$(4x-5)(x-4)=0$　$\therefore x=4, \cancel{\frac{5}{4}}$

sol1) 코사인 law in $\triangle ABM$

$\frac{16}{y^2}=9+4-2\cdot2\cdot3\cdot\frac{7}{8}$

$=\frac{5}{2}$　　$\therefore y^2=\frac{32}{5}$

$\therefore y=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

sol2) 중선정리

$9+4=2\left(\frac{16}{y^2}+4\right)$　$\therefore y=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때,
구 a_{10}의 값은? [4점] 등차수열 설정

> (가) $a_5 \times a_7 < 0$ $\longrightarrow a_8 \ominus 0 \oplus$?
>
> (나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$ 대입

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

(나) $a_7 + \cancel{a_8} + \overset{*}{a_9} + \cancel{a_{10}} + a_{11} + \cancel{a_{12}}$

$= 6 - (a_2 + a_4) + |a_8| + \cancel{a_8} + \cancel{a_{10}} + \cancel{a_{12}}$

$3 \times a_9 = 6 - 2 \times a_3 + |a_8|$
항개수 평균

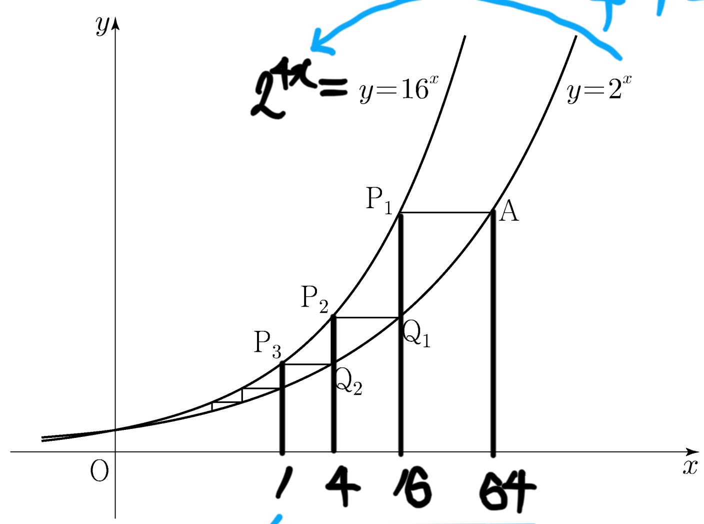
$\oplus$ a_{10}이므로
$3(a_{10} - 3) = 6 - 2(a_{10} - 21) + |a_{10} - 12|$
$5a_{10} - 57 = |a_{10} - 12|$ 방정식!

$a_{10} \geq 12$ $4a_{10} = 45$ $\therefore a_{10} = 11.25 < 12$ (모순)
$a_{10} < 12$ $6a_{10} = 69$ $\therefore a_{10} = \frac{23}{2}$

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다. 점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n<\frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60

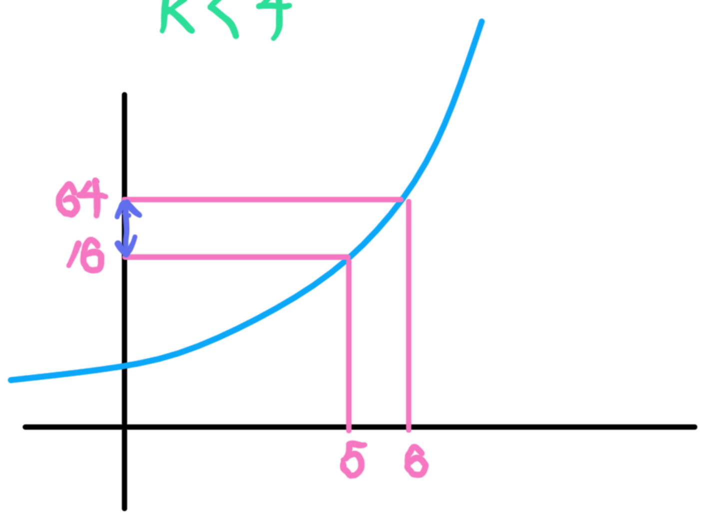
4배 축소!



공비 $\frac{1}{4}$ 등비

$x_n=4^{8-n}<\frac{1}{k}$

$k<4^{n-8}$



$k=16\sim63$ $\therefore 63-16=48$

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

최고차항의 계수 3 이차함수

$$g(x)=\begin{cases}-\int_0^x f(t)\,dt & (x<0)\\ \int_0^x f(t)\,dt & (x\geq 0)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{⑤}} \begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

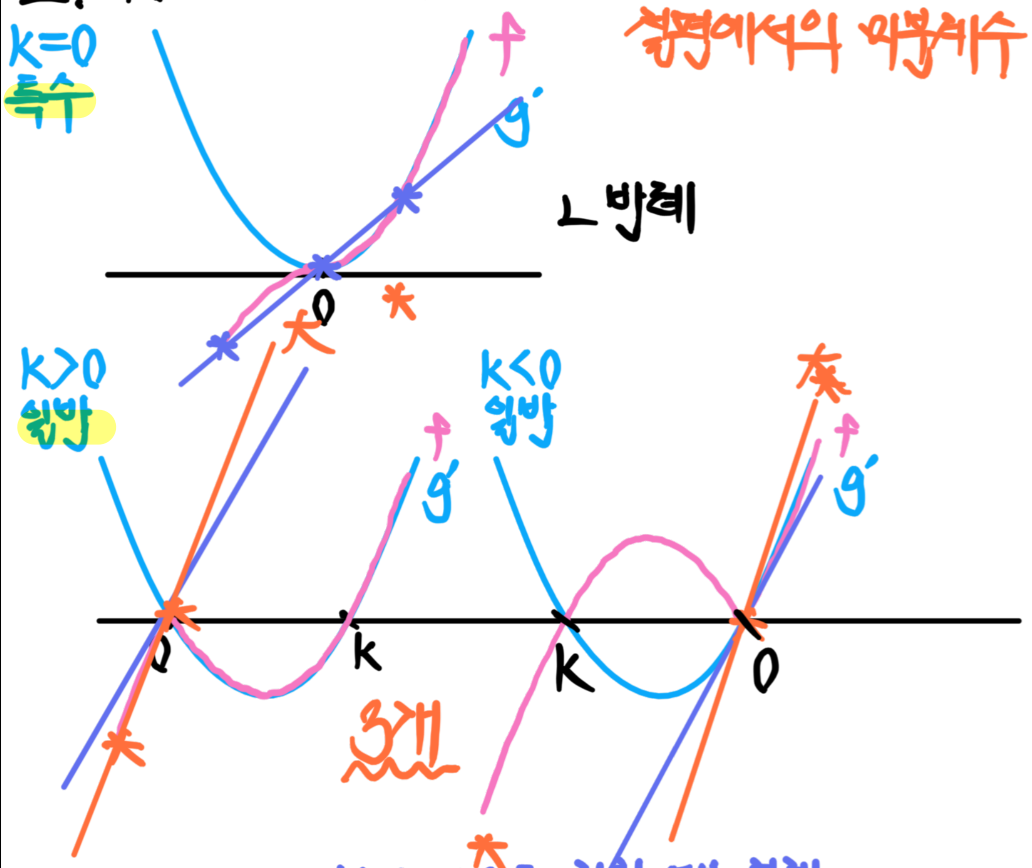
ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ.
1st. 연속 $g(0)=0$ 자명
2nd. 미가 $-f(0)=f(0)$ $\therefore f(0)=0$

ㄴ. $f(x)=3x(x-k)$ $(x>0)$ $f'(0)=-3k$
원점에서의 미분계수

k=0
특수



ㄷ. $y=x$는 원점 지나므로 접할 때 경계
$2<f(1)=3(1-k)<4$
$-\frac{1}{3}<k<\frac{1}{3}$
$-1<-3k<1$ ⇒ 접선보다 $y=x$ 大

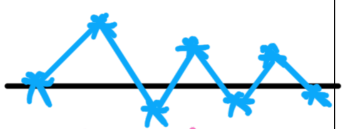
낯선 수열 ⇒ 써보면서 규칙 파악!

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

小

大



규칙반복

+ 언제가 0으로? ⇒ 주기

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$a_1 = 0$

$a_2 = 0 + \dfrac{1}{k+1}$

$a_3 = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}$

$a_4 = \dfrac{2}{k+1} - \dfrac{1}{k}$

$a_5 = \dfrac{2}{k+1} - \dfrac{2}{k}$

$\vdots$

$a_{2n-1} = \dfrac{n-1}{k+1} - \dfrac{n-1}{k}$

$a_{2n} = \dfrac{n}{k+1} - \dfrac{n-1}{k} = 0$

$n = 11$ $\quad \dfrac{11}{k+1} = \dfrac{10}{k}$ $\quad \therefore k = 10$

$a_1 = 0 \xrightarrow{21칸} a_{22} = 0$

주기는 21의 약수! ⇒ 3, 7

$a_1 = 0 \longrightarrow a_4 = 0 \quad \therefore k = 1$

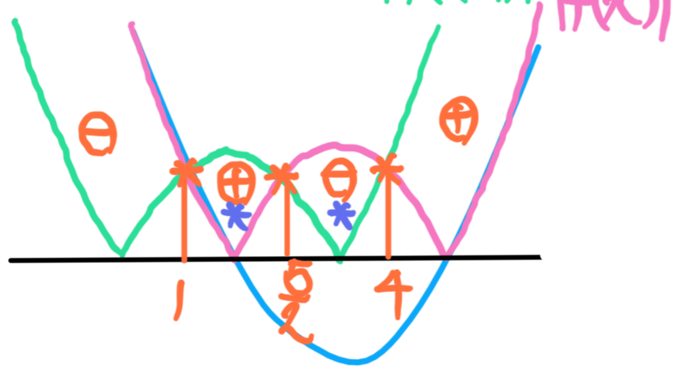
$a_1 = 0 \longrightarrow a_8 = 0 \quad \therefore k = 3$

$\therefore k = 1, 3, 10$

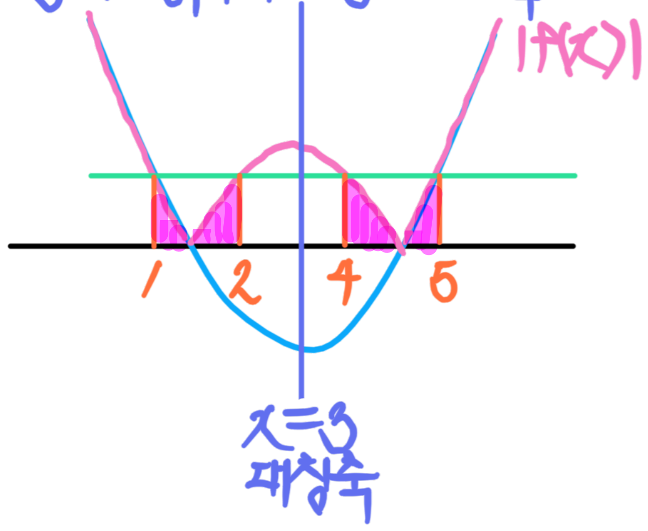
→대칭성!

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

$g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|$



$g(1)=\int_1^2|f| = g(4)=\int_4^5|f|$



$f(x)=2(x-3)^2+c$

$f(1)=8+c$
$f(2)=2+c$) 부호 반대 → 합 0

$10+2c=0$ $\therefore c=-5$

$\therefore f(0)=13$

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

로그 ⇒ 식조작!

$\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)$

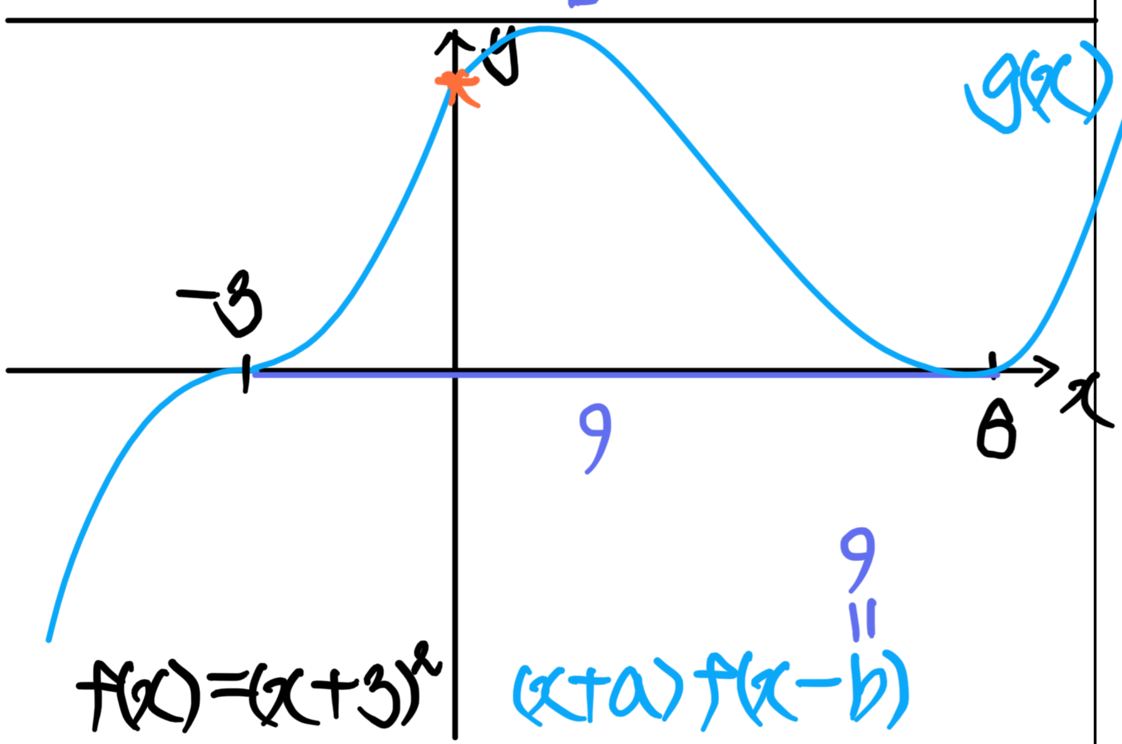
$-\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{4n+16}{3}\right)$

$-\frac{2}{3}\left\{\underbrace{\log_2\left(\frac{n+4}{3}\right)}_{3k+1}+2\right\}=$ 정수

$\frac{n+4}{3}=2^1, 2^4, 2^7, 2^{10}$

$n=2, 44, 380, \cancel{3068}$

$\therefore 426$



$f(x)=(x+3)^2$

$(x+a)f(x-b)$ ($f(x-b)=9$)

연속 $27=a\cdot 36$ $\therefore a=\frac{3}{4}$

$g(4)=\left(4+\frac{3}{4}\right)\cdot 4=16+3=19$

22. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\ge 0)\end{cases}$$

$3f(0)=af(-b)$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> $\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$ 의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

분모분자 0개수 비교!

식조작(유리화)

$\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right\}}$

① $g(t)=0$ 이면

$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|}}{(x+3)^2}$ 0개수 분모가 더 多...

⇒ 극한값 존재 × $\therefore g(-3)=g(6)=0$

② $g(t)\neq 0$ 이면

$\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\cdot 2|g(t)|}$ $(x+3)$인수 적어도 하나...

$=\frac{1}{2|g(t)|}\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2}$ $|g(x)|=|(x+3)f(x)|$, $f(x)=(x+3)(x-k)$

$k=3$ (특수)

$k\neq 3$ (일반)

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

25. 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

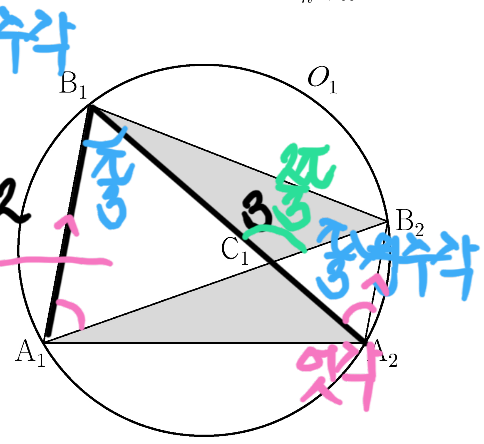
26. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.

점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 ⋈ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

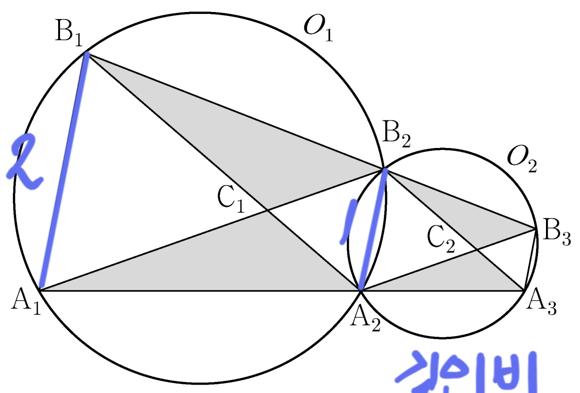
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



∴ 정삼각형

R_2



길이비 2:1
넓이비 4:1

⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$

④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$S_1 = 2\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin\frac{\pi}{3}$

$\frac{=\sqrt{3}}{1-\boxed{\frac{1}{4}}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

증∘증=증
증∘감=감
증∘극대=극대
증∘극소=극소

27. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 ↗등비 ↘교대

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=0$$

$$a_n=3n+1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{1}{k}-3-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) \quad \text{교대급수}$$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \ ■$$

28. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 (증가)

함수 $g(x)$가 $\ln x \circ |f(x)|$

합성함수 분리

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

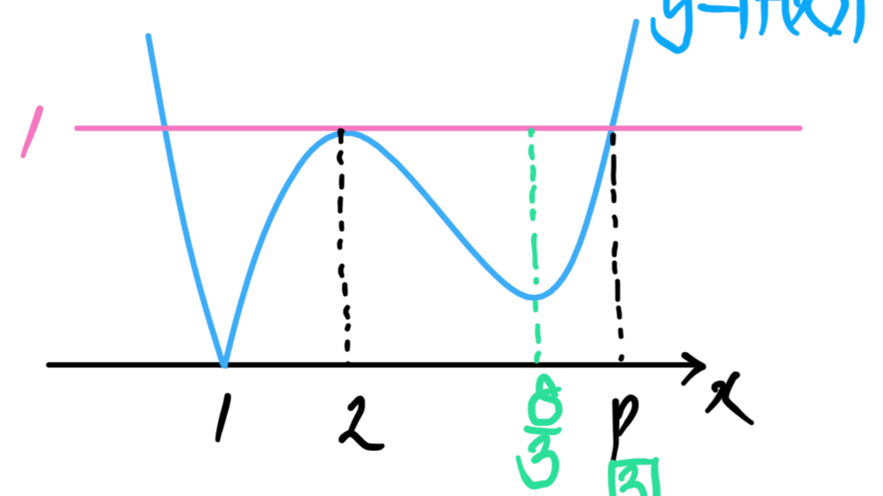
> (가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다. ⇒ $f(1)=0$
>
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
> 함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
>
> (다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. ⇒ 특수, 접

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

(나) $|f(x)|$ $x=2$에서 극대

and

$g(2)\le 0 \Rightarrow 0<f(2)\le 1$



$$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-p)+1 \quad (단, p>2)$$

$$f(1)=\frac{1}{2}(1-p)+1=0 \quad \therefore p=3$$

$g(x)$ 극솟값 ⇒ $\ln\left|f\left(\frac{8}{3}\right)\right|=\ln\frac{25}{27}$ ■

단답형

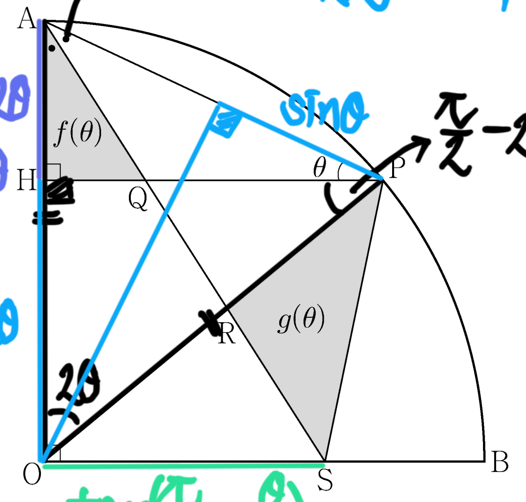
29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, ∠OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. ∠APH$=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)} = k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

$\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$

이등변△ ⇒ 수직이등분

방법1) $1-\cos 2\theta$

방법2) $2\sin^2\theta$



$\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$

$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2\theta^2\cdot 2\theta^2\cdot \tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$

각의 이등분선 ⇒ 비율관계

$\overline{OR}:\overline{RP}=1:2\sin\theta$

$g(\theta)=\triangle OSP \times \frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$

$=\frac{1}{2}\times 1\times \tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\times \frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+} \frac{\theta^3\times\frac{1}{2}\times\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}}{2\theta^4}=\frac{1}{2}=k$

$\therefore 100k=50$ ■

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$ 이차×지수

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$ $(t, f(t))$에서의 접선

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. ⇒ 특수? (수평접선, 변곡접선)

$g(5)+\lim_{t\to 5}g(t)=5$일 때, $\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$를 만족시키는

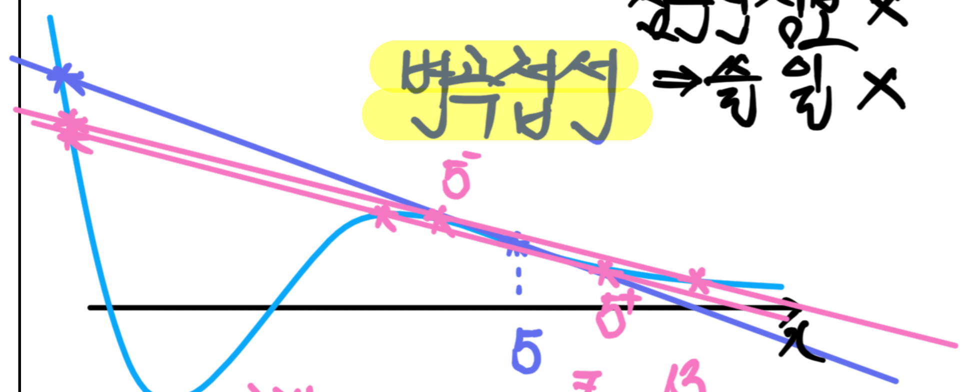
$2+3$

모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] (단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$)

접선의 정보 ×

변곡접선 ⇒ 숨은 일 ×



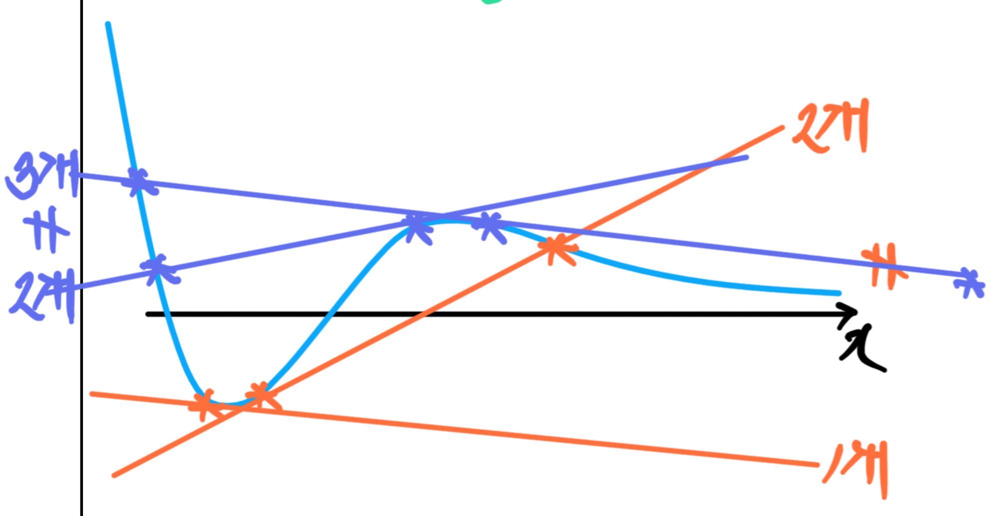
극대 $2+a=2+\frac{7}{3}=\frac{13}{3}$

$f'(x)=(-x^2+(2+a)x-a)e^{-x}$

$f''(x)=(x^2-(a+4)x+2+2a)e^{-x}$

$f''(5)=25-5a-20+2+2a=0$

$\therefore a=\frac{7}{3}$



⇒ k는 극점 x좌표 $\therefore 16$ ■

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.