미분 가능성의 모든 것

_인수 개수로 턱턱 푸는 법 by UR dokzon

-미분 가능성

주로 미분 불가능한 함수가 곱함수나 합성함수의 일부로 등장한다.
이때, 최종적으로 미분가능하게 만들어주는 함수가 중요한데 유형이 다음과 같다.

ⅰ) $y=f(x)$가 연속이고 미분이 가능할 때

1. $x=a$에서 불연속인 함수 $g(x)$에 대해 $f(x)g(x)$가 미분 가능하도록 하는 경우

$f(x)g(x)$를 미분하면, $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이다. 이때 $g(x)$와 $g'(x)$의 값 모두 $x=a$ 좌우에서 다르므로 $f(a)=f'(a)=0$이어야 한다. ∴ $f(x)=(x-a)^2Q(x)$ 와 같이 $(x-a)$라는 인수를 1개 초과로 가져야 함을 알 수 있다.

2. $x=a$에서 극한값은 존재하고, 함숫값은 다른 불연속인 함수 $g(x)$에 대해 $f(x)g(x)$가
 미분 가능하도록 하는 경우

우선 미분가능하려면 연속이어야 하므로 $f(a)=0$이어야 한다. 그리고 위의 경우와 마찬가지로 하면, 이번에는 $g(x)$의 값만이 $x=a$ 좌우에서 값이 다르므로, $g(x)$에 곱해져 있는 $f'(x)$가 $x=a$에서 0이 되어야 함을 알 수 있다. 따라서, $(x-a)$라는 인수를 1개 초과로 가져야 한다.

3. $x=a$에서 연속이고 미분 불가능한 함수 $g(x)$에 대해 $f(x)g(x)$가 미분 가능하도록 하는 경우

위의 경우와 마찬가지로 하면, 이번에는 $g(x)$의 값만이 $x=a$ 좌우에서 값이 다르므로, $g(x)$에 곱해져 있는 $f'(x)$가 $x=a$에서 0이 되어야 함을 알 수 있다. 따라서, $(x-a)$라는 인수를 0개 초과로 가져야 한다.

ⅱ) $y=f(x)$가 불연속이거나 미분 불가능할 때

이 경우는 일반적으로 정리해두기 어렵고, 연속성에 대해서는 좌극한과 우극한을, 미분 가능성에 대해서는 좌미분계수와 우미분계수에 대해서 조사해야 한다. 이는 연습해보도록 하자.

많이 빼먹는 것이 미분계수의 정의를 사용하는 방법인데, 다음의 예제를 해보자.

ex 1. $\sqrt[3]{|x|}$의 $x=0$에서의 미분 가능성을 조사해라.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{|x|}-0}{x-0}=(0+)^{-\frac{2}{3}}$ at $(x>0)$ & $-(0-)^{-\frac{2}{3}}$ at $(x<0)$ → $\pm\infty$로 발산하므로 극한값 X

∴ 미분 불가능함을 알 수 있다. … 위의 이유로 인수가 1개 초과여야 미분이 가능하다.

인수 개수는 $(x-a)$ 형태의 다항함수가 기본이지만, 다른 형태도 존재한다.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 이므로 $x=0$에서 $\sin x\approx x$가 가능해 $\sin x$도 x처럼 인수 개수 1개를 차지한다.

2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ 이므로 $x=0$에서 $(1-\cos x)\approx\frac{1}{2}x^2$ 이 가능해 $(1-\cos x)$도 $\frac{1}{2}x^2$처럼 인수 개수 2개를 차지한다.

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ 이므로 $x=0$에서 $\tan x\approx x$가 가능해 $\tan x$도 x처럼 인수 개수 1개를 차지한다.

이뿐만 아니라 평행 이동된 형태 모두 가능하니 적절히 변형해서 사용하면 된다.

ex 2. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(a-x)^n\tan x=b$ (b는 실수)라고 하자. 실수 a와 자연수 n에 대해 $\frac{2abn}{\pi}$를 구하시오.

해설_

우선 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x=\infty$이므로 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(a-x)^n=0$이어야 한다. $\cdots$ $a=\frac{\pi}{2}$

$x\to\frac{\pi}{2}-$ 일 때의 $\tan x$는, $x\to 0+$일 때의 $\cot x$와 일치한다. 따라서 문제를 변형해보자.

$\lim_{(\frac{\pi}{2}-x)\to 0+}(\frac{\pi}{2}-x)^n\cot(\frac{\pi}{2}-x)=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^n}{\tan\theta}$ ($\because$ $\frac{\pi}{2}-x=\theta$로 치환) $\to$ $n=1$, $b=1$ $\to$ 1(답)

이 문제에서 한 것처럼 위의 세 기본 형태와 같은 모양이 되도록 형태를 변형해주면 똑같이 사용 가능함을 이 문제를 통해 알 수 있었다.

한편, 미분가능성을 물어볼 때 자주 결합되어 나오는 기호들이 있다.
대표적인 것이 바로 ‘$|\ |$’와 ‘$\sqrt{\ }$’이다.

1) $|\ |$와 결합되어 나오는 미분 가능성

$f(x)=0$의 근, a에 대해 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수의 값이 절댓값은 동일하고 부호만 반대가 되는 것이 특징이다. 크기는 같으므로 부호를 맞춰주는 것에만 신경써주어도 된다. 이는 특정 함수의 제곱 형태일 때 유효하다(크기가 같고 부호가 반대일 경우 제곱하면 아예 같아지므로).

2) $\sqrt{\ }$와 결합되어 나오는 미분 가능성

$\sqrt[n]{\ }$는 인수 개수를 $\frac{1}{n}$하는 효과가 있다. 따라서 $\sqrt[n]{\ }$ 안의 함수에서 인수 개수를 확인한 후 $\frac{1}{n}$을 해주고 판단해야 한다. $\sqrt{\ }$안에는 양수여야 하므로 주로 $\sqrt{|\ |}$의 형태처럼 $|\ |$와 $\sqrt{\ }$가 결합되어 나오니 유의해두자.

이따 여러 문제들에서 활용하며 연습해보도록 하자.

마지막으로 미분계수의 정의 식에 대해 공부해보도록 하자. 미분계수의 정의는 두 가지이다.

1) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$　　　　2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

이중 1)에 대해서는 변형이 매우 다양하다. 이를 관련 기출 해설을 통해 설명해보겠다.

ex 3. 2013학년도 사관학교 18번
모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하기 위한 필요충분조건인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}$의 값이 존재한다.

ㄴ. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}$의 값이 존재한다.

ㄷ. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$의 값이 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

해설_

ㄱ. $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}$의 극한값이 존재하는지 살펴보기 위해 우극한과 좌극한을 따로 구해보자.

$f(x)$의 우미분계수와 좌미분계수가 같아야 $f(x)$가 그 점에서 미분이 가능하므로 계산해보자.

$\lim_{h\to0+}$: $\frac{f(a+(h^+)^2)-f(a)}{(h^+)^2}=f(x)$의 $x=a$에서의 우미분계수

$\lim_{h\to0-}$: $\frac{f(a+(h^-)^2)-f(a)}{(h^-)^2}=\frac{f(a+(h^+)^2)-f(a)}{(h^+)^2}=f(x)$의 $x=a$에서의 좌미분계수

결국 우극한과 좌극한이 모두 $f(x)$의 우미분계수이므로, 극한값이 존재한다고 해서 우미분계수와 좌미분계수가 같은지를 알 수 없다. 따라서 필요충분조건이라고 할 수 없다.

ㄴ. $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}$의 극한값을 구해보자.

$\lim_{h\to0+}$: $\frac{f(a+(h^+)^3)-f(a)}{(h^+)^3}=f(x)$의 $x=a$에서의 우미분계수

$\lim_{h\to0-}$: $\frac{f(a+(h^-)^3)-f(a)}{(h^-)^3}=f(x)$의 $x=a$에서의 좌미분계수

이번에는 좌극한과 우극한이 모두 좌미분계수와 우미분계수를 뜻하므로 극한값이 존재한다는 것은 $x=a$에서의 미분계수가 존재 즉, 미분가능함을 알 수 있다.

ㄷ. $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$의 극한값을 구해보자.

$\lim_{h\to0+}$: $\frac{f(a+h^+)-f(a-h^+)}{2h^+}=\frac{f(a+h^+)-f(a)}{2h^+}+\frac{f(a+h^-)-f(a)}{2h^-}=f(x)$의 $x=a$에서의 우미분계수와 좌미분계수의 평균

$\lim_{h\to0-}$: $\frac{f(a+h^-)-f(a-h^-)}{2h^-}=\frac{f(a+h^-)-f(a)}{2h^-}+\frac{f(a+h^+)-f(a)}{2h^+}=f(x)$의 $x=a$에서의 우미분계수와 좌미분계수의 평균

→ 좌극한과 우극한이 원래 같은 식이므로 이 식의 극한이 존재한다고 해서 $f(x)$의 좌미분계수와 우미분계수가 같은지를 알 수 없다. 따라서, 필요충분조건이라고 할 수 없다.

이처럼 미분계수의 정의와 유사한 극한식에서 우극한과 좌극한이 같다는 것이 $x=a$에서의 $f(x)$의 우미분계수와 좌미분계수가 같다는 것을 의미해야만이 그 극한식이 $f(x)$의 미분가능성을 뜻한다고 말할 수 있다.

따라서 극한식의 좌극한과 우극한을 따로 구해서 $x=a$ 양쪽을 모두 살펴보려고 노력하자.
관련 기출 하나만 더 보자.

ex 4. 2022학년도 9월 모의고사 22번
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

해설_
주어진 식의 의미를 생각해보자. $\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$ = $|f(x)|$의 (좌미+우미)
$g(x)$는 연속이므로 첨점에서 $\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$가 불연속일 때, $f(x-3)$에서 인수 하나가 최소한 있어야 $g(x)$가 연속일 수 있다. 즉, $y=|f(x)|$가 미분 불가능한, $f(x)$가 단일근을 갖는 점과 $f(x-3)$이 근을 갖는 점이 겹쳐야 함을 알 수 있다.

$y=|f(x)|$가 미분 불가능한 점과 $f(x-3)$이 근을 갖는 점은 x축 방향으로 3만큼 차이난다.
3만큼 차이남에도 완벽히 겹치려면 $f(x)$가 세 근을 가져서는 안된다.
3만큼 오른쪽으로 옮겼을 때 겹쳐야 하므로, $f(x)=(x-\alpha)^2(x-(\alpha+3))$

(나) $g(x)=0$의 근은 α, $\alpha+2$, $\alpha+3$, $\alpha+6$이므로 $4\alpha+11=7$ $\therefore \alpha=-1$
$f(x)=(x+1)^2(x-2)\to f(5)=108$ (답)

미분 가능성 기출편

1. 2017학년도 9월 평가원 가형 30번
최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오.

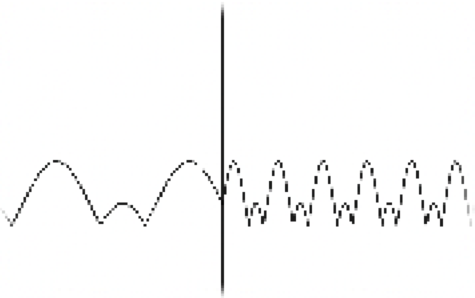
해설_ 48

절댓값 안의 식을 정리해보자.

$x>0$: $2\sin(3x)+1$, $x<0$: $-2\sin x+1$ $\rightarrow$ $x=0$에서 좌우 미분계수가 각각 -2 / 6이다.

한편, 절댓값으로 인해 절댓값 안의 식이 0이 되는 지점들에서 첨점이 생긴다.

그림으로 나타내면 다음과 같다.



$x>0$: 첨점의 기울기는 $\pm 3\sqrt{3}$

$x<0$: 첨점의 기울기는 $\pm\sqrt{3}$

$h(x)=f(g(x))$ $\rightarrow$ $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ $\rightarrow$ $h''(x)=f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)$

$h(x)$가 이계도함수를 갖고, $h''(x)$가 연속이므로 $h'(x)$도 연속일 것이다.

$f'(g(x))g'(x)$ $\rightarrow$ $x=0$ 주변을 살피자: $g'(0-)\neq g'(0+)$ $\rightarrow$ $f'(g(0))=f'(1)=0$

$\rightarrow$ $g(x)=0$ 주변을 살피자: $g'(x)=\pm 3\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3}$ $\rightarrow$ $f'(0)=0$

$f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)$ $\rightarrow$ $x=0$ 주변을 살피자: $\{g'(x)\}^2$과 $g''(x)$가 모두 불연속

$\rightarrow$ $f''(g(0))=0$, $f'(g(0))=0$ $\rightarrow$ $f''(1)=0$

$\rightarrow$ $g(x)=0$ 주변을 살피자: 절댓값은 같고 부호만 다르므로 $\{g'(x)\}^2$은 연속,

$g''(x)$는 불연속 $\rightarrow$ $f'(g(0))=0$

구한 식을 모두 이용하면, $f'(x)=4x(x-1)^2$ $\rightarrow$ $f'(3)=12\times 4=48$(답)

불연속인 부분과 곱해져 있는 식이 0이 되는 것을 이용한 기본적인 문제이고,

절댓값의 특징이 절댓값은 같고 부호가 다르다는 것을 배워가도록 하자.

2. 2019학년도 6월 21번

열린 구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 t의 개수를 $g(t)$라 하자.

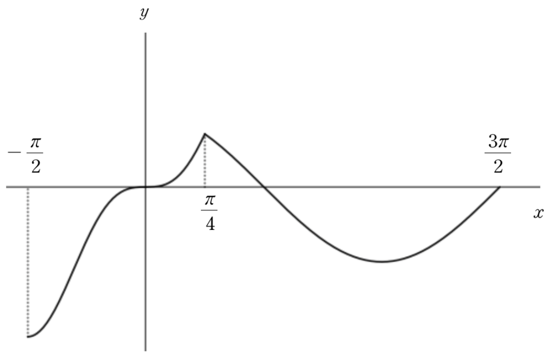
(가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$
(나) 함수 $\sqrt{\lvert f(x)-t\rvert}$ 는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$ 라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은?

① 96 ② 97 ③ 98
④ 99 ⑤ 100

해설_ ④

우선 $y=f(x)$를 그림으로 그려보자.



(가)와 (나)를 독해하면, $y=t$를 $y=f(x)$에 그려서 절댓값을 씌우고, 미분가능성을 따지라는 얘기이다.

우선, $x=\frac{\pi}{4}$는 애초에 첨점이므로 $y=t$에서 t의 값에 관계없이 미분 불가능하다.

또한, $y=t$와 단일근으로 만나는 점들도 전부 미분 불가능할 것이다.

그렇다면, 과연 중근은 어떨지 따져보자.

$x=\pi$에서 접하는 $t=-1$일 때를 보면, $\lim_{x\to\pi}(\cos+1)=\lim_{x\to0+}(1-\cos x)\approx\frac{1}{2}x^2$이므로 인수 2개이다.

2개이다...? 이제 절댓값을 씌우고 $\sqrt{\ }$까지 씌워야 한다. 그러면, $\frac{1}{2}$를 취해서 인수 1개이다.

미분이 가능하려면, 1개 초과여야 한다. 따라서 이때에도 미분 불가능하다.

$y=t=0$일 때도 따져보자. $2\sin^3 x\approx 2x^3$이므로 인수 3개이다. 여기에 절댓값을 씌우고 $\sqrt{\ }$를 씌우면, 인수가 1.5개이다. 따라서 1개 초과이므로 미분 가능하다.

$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$첨점 하나 at $x=\frac{\pi}{4}$ $\to$ $a=1$

$g(0)=$첨점 두 개 at $x=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}$ $\to$ $b=2$

$g(-1)=$첨점 세 개 at $2\sin^3\theta=-1$을 만족하는 θ에 대해 $x=\theta,\ \frac{\pi}{4},\ \pi$ $\to$ $c=3$

$g(t)$의 함숫값으로 가능한 값은 1~4이므로, $h(g(x))$가 연속이려면, $h(1)=h(2)=h(3)=h(4)$

$\to$ $h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+C$

$h(a+5)-h(b+3)=h(6)-h(5)=120-24+3=99$(답)