[22학년도 6월 모의고사]

[Review by JIP]

| 대학수학능력시험 수학 연습 |

-‘한권으로 완성하는 수학’의 내용이 많이 인용되어있습니다. (e.g. 평면기하 역추적법, 삼각형 ‘안다’, 점정대, 빼기 함수, 예시 들어 핵심 파악, 구간별 함수의 연속성, 구간별 함수의 미분가능성, 절댓값 함수의 미분가능성, 정적분으로 정의된 함수, etc)

-‘한성은’ 선생님의 관점이 많이 인용되어있습니다. (e.g. 차함수, 음함수 미분법 ‘~일 때’, 28번 sol2) sin법칙, 30번 sol2)합성함수 미분, etc)

-‘제’ 관점이 많이 들어가있습니다. (e.g. 평문아, dX/d{f(x)} (a.k.a. 관점), 12번 sol3) 연립이차방정식, 21번 sol1) 일일이 나열 등)

-나름대로 검토 한다고 했는데, 오류 or 질문 있음 연락 부탁

-혹시 문제될 거 있거나 시비걸고 싶음 연락 부탁

-무단 배포 환영

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

지수가 실수인 지수법칙

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$a>0,\ b>0,\ x\in R,\ y\in R$

① $a^x \times a^y = a^{x+y}$

③ $(a^x)^y = a^{xy}$

② $a^x \div a^y = a^{x-y}$

④ $(ab)^x = a^x b^x$

부정적분 or # 원함수 높이차 = 도함수 넓이

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x^2-2x,\quad f(1)=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

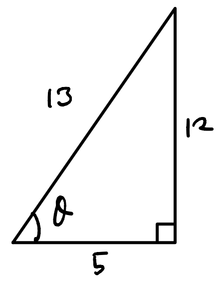
sol₁) $f(x)=\int f'(x)dx + C$ $\quad f(1)=1$

sol₂) $f(2)-f(1)=\int_1^2 f'(x)dx$

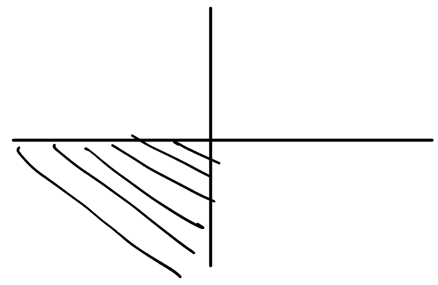
삼각함수값

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$



⊕

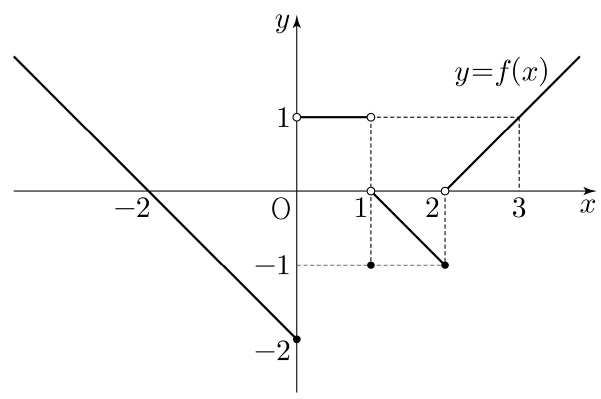


"삼각함수값 하나 알면 다 안다"

"부호도 결정"

함수의 극한

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \quad (\alpha \in R)$

$\Leftrightarrow$ x가 a로 한없이 가까이갈 때 $f(x)$가 α로 "

$\Leftrightarrow$ $x\to a,\ f(x)\to\alpha$

⊕ $\lim_{x\to a} f(x)$ 수렴 or 발산 : 이분법적 사고

연산함수 미분

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = (x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f(x)$, $g(x)$ 미·가)

$f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) 미·가

$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{\{f(x+h) \pm g(x+h)\} - \{f(x) \pm g(x)\}}{h}$

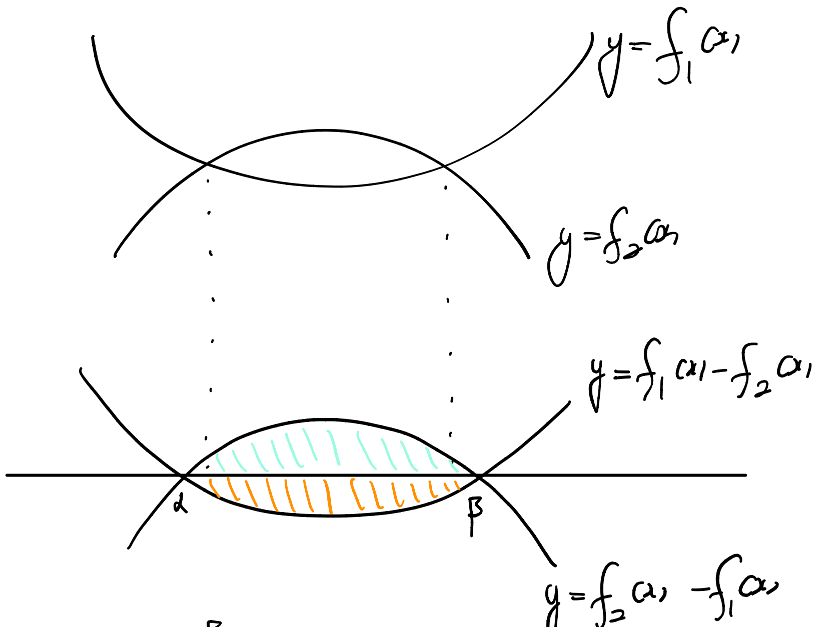
를 "수렴하는 함수"인

$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\lim_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ 로 표현

다항함수 넓이

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$S = \int_\alpha^\beta |f_1(x) - f_2(x)|\, dx$

대소 신경쓸 필요 X

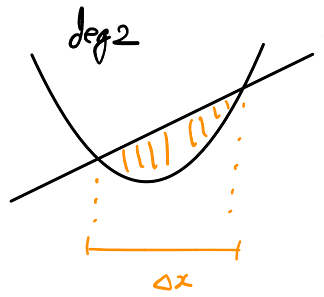
$f_1(x) = f_2(x)$ 지점만 구해서

차함수 (cf. 평균값 정리) 와

x축으로 둘러싸인 넓이

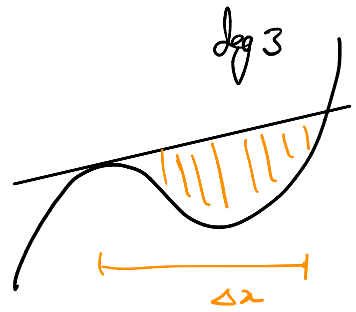
<다항함수 넓이공식>

$\int_\alpha^\beta |k(x-\alpha)^m(x-\beta)^n|\, dx \xrightarrow[\text{연속적용}]{\text{부분적분법}}$ ☆



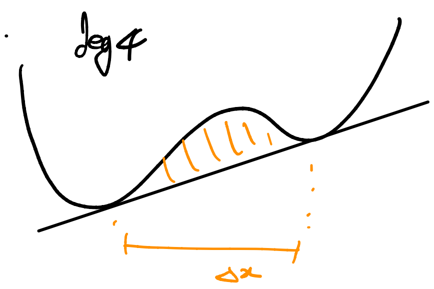
$S = \dfrac{|최고차항 계수|}{6} \times (\Delta x)^3$

$f(x) - l(x) = k(x-\alpha)(x-\beta)$



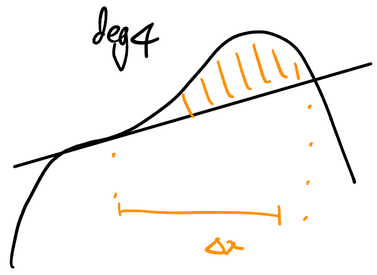
$S = \dfrac{|최·계|}{12} \times (\Delta x)^4$

$f(x) - l(x) = k(x-\alpha)^2(x-\beta)$



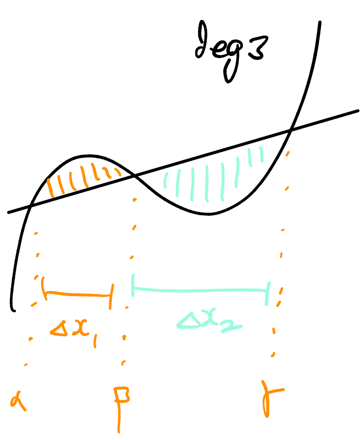
$S = \dfrac{|최·계|}{30} \times (\Delta x)^5$

$f(x) - l(x) = k(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$



$S = \dfrac{|최·계|}{20} \times (\Delta x)^5$

$f(x) - l(x) = k(x-\alpha)^3(x-\beta)$



$S = \dfrac{|최·계|}{6} \times (\Delta x_1)^3 \times \left(\gamma - \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$S = \dfrac{|최·계|}{6} \times (\Delta x_2)^3 \left(\dfrac{\beta+\gamma}{2} - \alpha\right)$

$f(x) - l(x) = k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

(번장1) 평가원은 문제를 아름답게 만든다.

계산하지 말고 다항함수 넓이 공식 쓰라고 낸거다.

④ 등차수열 $a_n = pn + q$

$\downarrow \uparrow$

$S_n = \frac{1}{2}pn^2 + (\frac{1}{2}p + q)n$

$= \frac{1}{2}pn\left(n + \frac{\frac{1}{2}p + q}{\frac{1}{2}p}\right)$

등비수열 $a_n = p \cdot q^n$

$\downarrow \uparrow$

$S_n = \frac{pq}{q-1}(q^n - 1)$

등차수열

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

⚲ 실수 조심!! 등차 / 등비 구분

$\boxed{a_6 = 2(S_3 - S_2)}$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$a_n \longrightarrow S_n$ or $\boxed{S_n \rightarrow a_n}$ 역.

$S_3 - S_2 = a_3$

$a_6 = 2a_3$

$(a_1 + 5d) = 2(a_1 + 2d) \longrightarrow d = 2$

등차수열 : 자연수 정의역인 $\boxed{\text{일차함수}}$

자유도 2 : 정보 2개여야 확정

· $a_1 = 2$

· $d = 2$

$\boxed{a_n = 2n}$

$S_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$

$= 10 \times a_{\frac{1+10}{2}}$

$= 10\left(2 \cdot \frac{11}{2}\right)$

$= 110$

구간 별 함수의 연속성

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$$\{f(x)\}^2 = \begin{cases} (-2x+6)^2 & (x<a) \\ (2x-a)^2 & (x \geq a) \end{cases}$$

연속

연속

$(-2x+6)^2 \big|_{x=a} = (2x-a)^2 \big|_{x=a}$

Q "구간 별 함수 쓰기"

$\lim_{x \to a+} (2x-a)^2 = \lim_{x \to a-} (-2x+6)^2 = (2x-a)^2 \big|_{x=a}$

⊕ $f(x)$ $x=a$ 연속 $\Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) = \alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$

수열 귀납적 정의

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

수열 귀납적 정의
- 나열 (ft. 예시들어 핵심 파악)
- $n \pm 1$ 대입, 연립 (ft. n칸 건너 규칙, n개 묶어 규칙)
- Σ telescope
- Π "

$n=11$, $a_{12} = \frac{1}{a_{11}}$

$n=10$, $a_{11} = 8a_{10}$

⋮

→ 주기 4 순환

로그함수의 그래프

10. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x, \quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

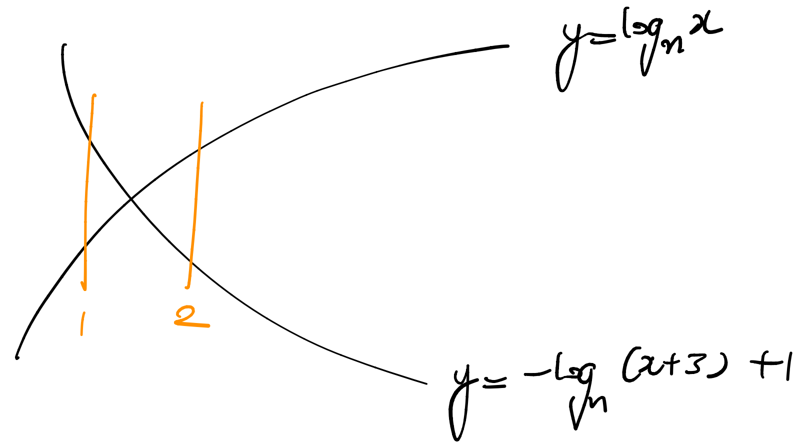
① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

sol1) $\log_n x = -\log_n(x+3)+1$

$\Leftrightarrow x^2+3x-n=0 \quad (x>0)$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{-3+\sqrt{9+4n}}{2}$

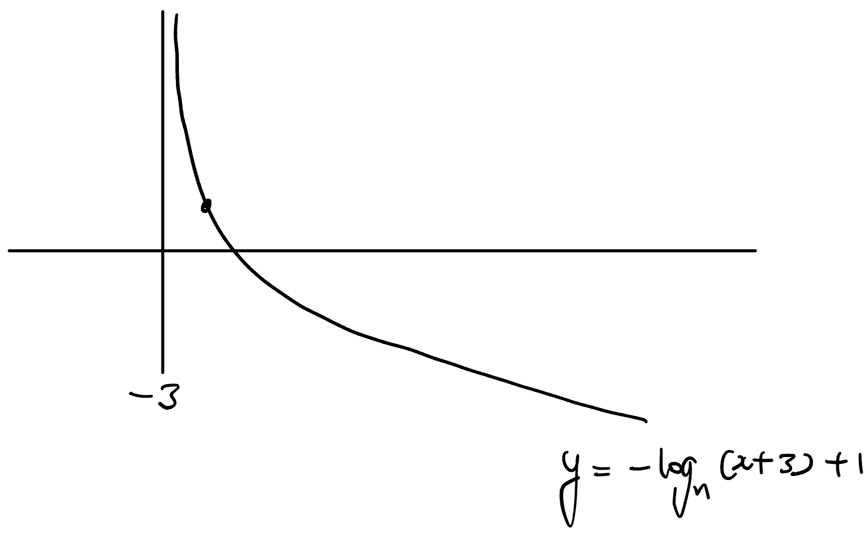
sol2)



- $\log_n x \big|_{x=1} < -\log_n(x+3)+1 \big|_{x=1}$
- $\log_n x \big|_{x=2} > -\log_n(x+3)+1 \big|_{x=2}$

⊕ $y=-\log_n(x+3)+1$

1. 점근선 $x=-3$
2. 정점 $(-2, 1)$
3. 대입



~~# 정적분~~

11. 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$ 의 값은? [4점]

$f(x)$ x축방향 -1 평행이동 ⟶ x축 대칭 ⟶ y축 방향 $+1$ 평행이동

(가) $g(x)=\begin{cases} \boxed{-f(x+1)+1} & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $\boxed{g(x+2)=g(x)}$ 이다.

주기 $\frac{2}{n}$ (n은 정수)

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

$$\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} g(x)\,dx + \int_{-1}^{1} g(x)\,dx + \int_{1}^{2} g(x)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{1} g(x+2)\,dx + \int_{-1}^{1} g(x)\,dx + \int_{1}^{2} g(x-2)\,dx$$

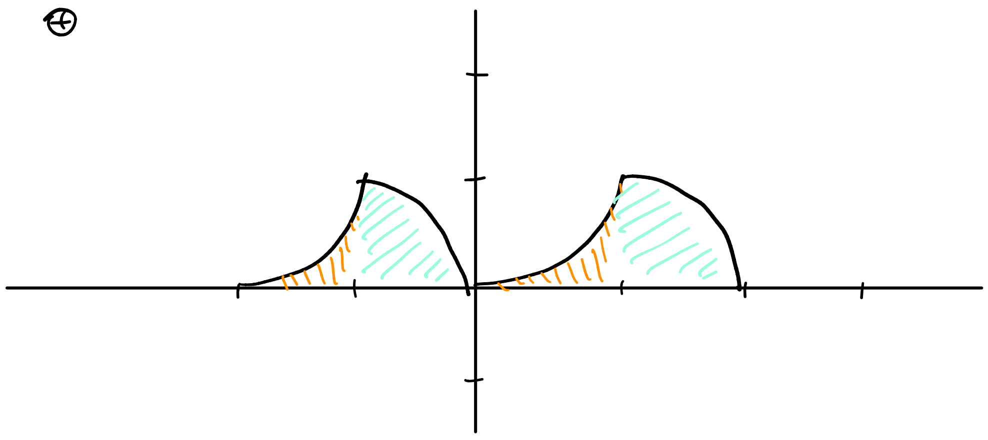
$$= \int_{-1}^{1} g(x)\,dx + \int_{-1}^{1} g(x)\,dx + \int_{-1}^{0} g(x)\,dx$$

$$= 3\int_{-1}^{0} g(x)\,dx + 2\int_{0}^{1} g(x)\,dx$$

$$= 3\int_{-1}^{0} \{-f(x+1)+1\}\,dx + 2\int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{1} f(x)\,dx + 3$$

Q "모르는 것을 아는 것으로 표현"



Q 현장에선 나도 이렇게 했지.

다만, 볼록성, 증감 등을 알수 없기에 not correct

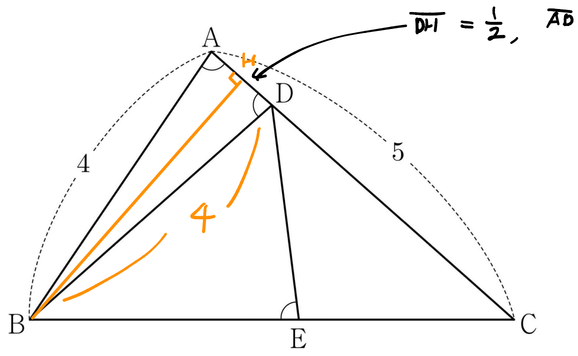
시험발상 1 현장에선 답만 맞으면 옳은 거야

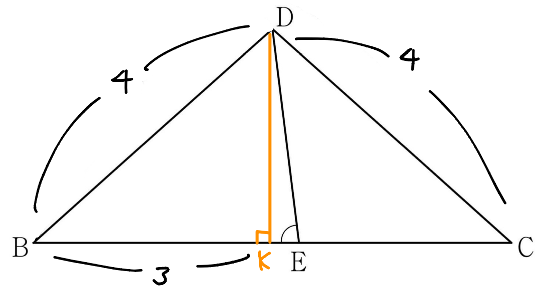
발상1

sol1) 이등변△ ⟶ 수직이등분선

중학 기하 적극 활용 (ft. 한완수 수1/수2 part1)

$\overline{DH}=\frac{1}{2}$, $\overline{AD}=1$ ⟶ $\overline{CD}=4$

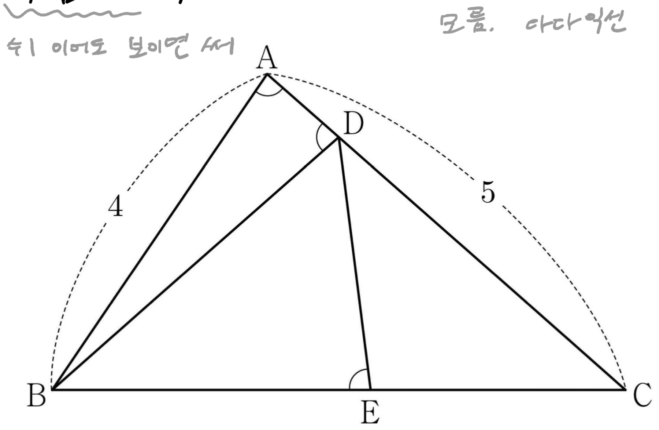




sol2) 덧셈정리, sin법칙

수1 이어도 보이면 써

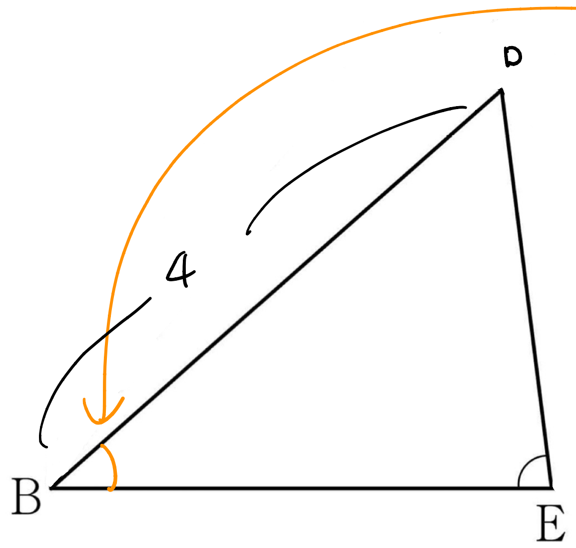
현장에선 뭐가 보이고 뭐가 안보일지 모름. 다다익선



△ABC 앎 ⟶ $\cos(\angle ABC)$ = ☆

△ABD 앎 ⟶ $\cos(\angle ABD)$ = ☆

⟹ $\cos(\angle DBE) = \cos(\angle ABC - \angle ABD)$, $\boxed{\sin(\angle DBE) = ☆}$



정보 3개 ⟶ △BDE 앎

$$\frac{x}{\sin(\angle DBE)} = \frac{4}{\sin(\angle BED)}$$

평면기하 – sin법칙, cos법칙 or 이등변△

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인

삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

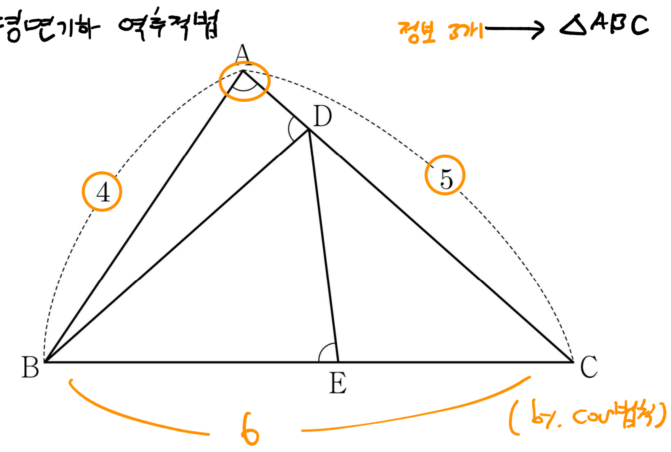
$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

각이 많다. sin법칙을 의심할 만 하다.

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]

발상1 평면기하 역추적법

정보 3개 ⟶ △ABC '안다'



(by. cos법칙)

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

< sin법칙 >

· 외접원

· $\sin a : \sin b = l_1 : l_2$

· 대응각

< cos법칙 >

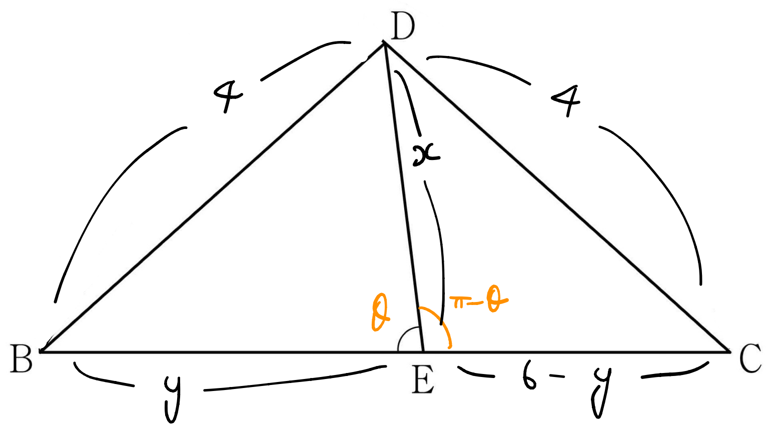
· 두변, 각 ⟶ 끼인각 ⟶ l = ☆

안끼인각 ⟶ l에 관한 이차방정식

· 세변

시험 발장! 답만 맞으면 된아

vol₃) 자유도 파악 ⟶ 연립방정식 (내 현장풀이)



① θ 안다
② $\overline{BE}+\overline{EC}=6$

서로 다른 상황 2개에 미지수 2개 (x, y) 이므로 '결정된다'는 확신

$\triangle BED$, $4^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$

$\triangle BEC$, $4^2 = x^2 + (6-y)^2 - 2x(6-y)\cos(\pi-\theta)$

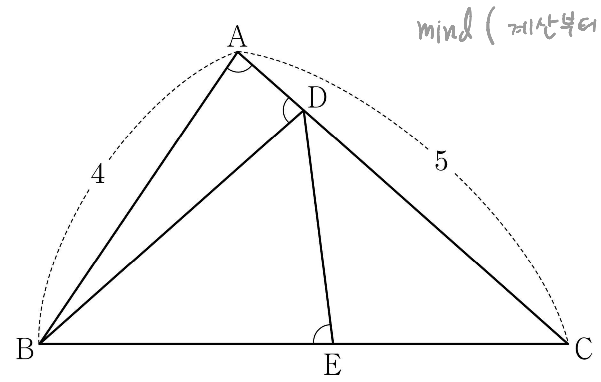
$\longrightarrow$ $x = ☆$, $y = ☆$

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]

⊕ vol₁, vol₂, vol₃ or α의 풀이를 '안다' 이용해 암산으로 끝내고 펜 움직인다는 mind (계산부터 해봤자 안됨)



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

Σ

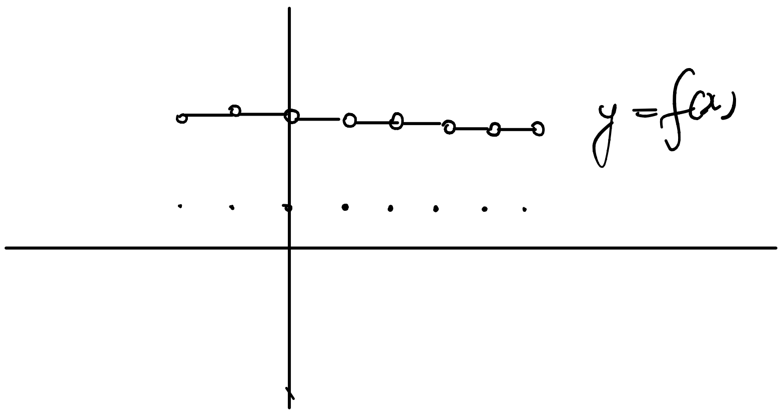
13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$ 의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190



$\boxed{\text{발상}}$ 예시 들어 핵심 파악

↓

$k=n^2$ (n은 자연수) → $f(k)=1$

$k\neq n^2$ (〃) → $f(k)=3$

$p>0, q>0$

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=\lvert xf(x-p)+qx\rvert$이다.   (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

(가) $xg(x)=\lvert x\{f(x-p)+q\}\rvert$

$= \lvert x\rvert \times \boxed{\lvert f(x-p)+q\rvert} = h(x)$

$\Leftrightarrow \boxed{g(x)=\begin{cases} h(x) & (x>0) \\ ?=0 & (x=0) \\ -h(x) & (x<0)\end{cases}}$

g 양변을 x로 나눴기에 $x\neq 0$이 성립구간

$y=h(x)$에 대해, $y=f(x-p)+q$는 deg 3

↓

적어도 1개의 근을 가짐 (∵ 사잇값 정리)

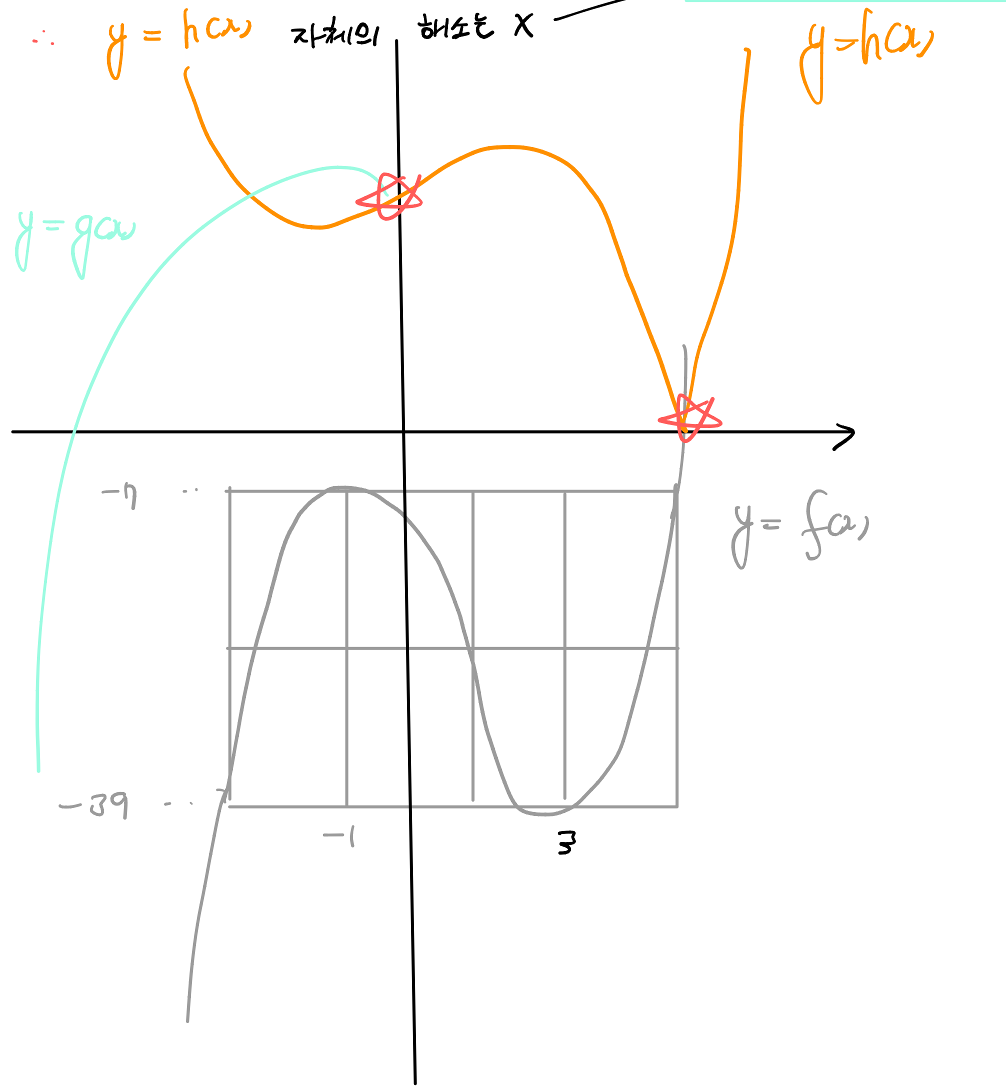
(나)

발상 예시 들어 핵심 파악

$p=q=0$일 때, 2개의 미·불 ((나) 모순)

$\therefore$ $y=h(x)$ 자체의 해소는 X

$\boxed{y=g(x)\text{가 } x=0 \text{에서 미가}}$



$$g(0)=\lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to0}\frac{xg(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\lvert x\rvert\cdot\lvert f(x-p)+q\rvert}{x}$$

$$\left(\begin{array}{l}\lim_{x\to0+}\lvert f(x-p)+q\rvert \\ \lim_{x\to0-}\{-\lvert f(x-p)+q\rvert\}\end{array}\right)=$$

$$\boxed{g(x)=\begin{cases} h(x) & (x\geq 0) \\ -h(x) & (x<0)\end{cases}}$$

$\boxed{y=g(x)\text{가 } x=0 \text{에서 미가}}$

① $y=h(x)$의 $x=0$ $\boxed{\text{우·미 } \alpha}$ → $y=-h(x)$ $x=0$ $\boxed{\text{좌·미 } -\alpha}$

$\alpha=0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lvert f(x-p)+q\rvert'\rvert_{x=0}=0}$

② $\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0-} g(x)=g(0)$ → $h(0)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{f(x-p)+q\rvert_{x=0}=0}$

수특 미적분

음함수 미분법 step3 ② 었나

삼각방정식

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

ebs 수특 연계 삼각, 올해 수능에 유의미하진 않을 듯

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

다만, 이 표현은 미적분 킬러에도 자주 나온다

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

발상1 예시 들어 핵심 파악

올해 수능
14 : 수2 준킬러
15 : 수1 킬러
21 : 수1 준킬러
22 : 수2 킬러

일 확률 ⇑. 15에 수열이 뜰지, 삼각함수가 뜰지, 지수·로그함수 그래프가 뜰지 알 수 없음. 다양한 사설 모고에서 공통적으로 자주 뜨는 게 뭔지 주시할 필요 o.

단답형

로그의 성질

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

$a, b>0, \neq 1.$ $M, N>0$

① $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

② $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

③ $\log_a M^x = x \log_a M$ ($x \in \mathbb{R}$)

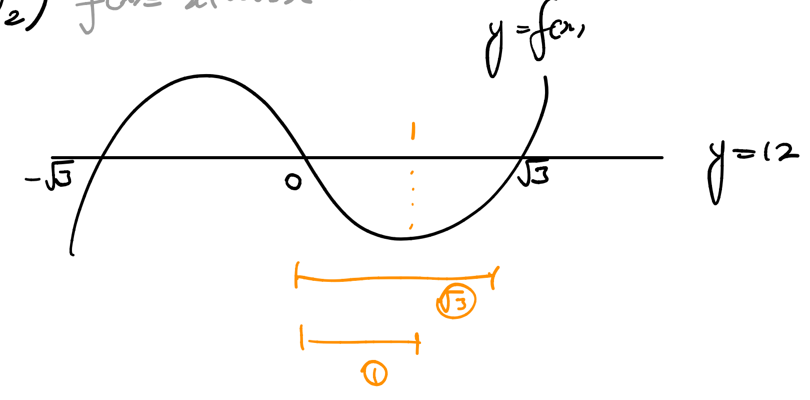
④ $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

log3

17. 함수 $f(x)=x^3-3x+12$가 $x=a$에서 극소일 때, $a+f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

sol₁) $f'(x) =$

sol₂) $f(x) = x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})+12$



등비수열

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

등차/등비 구분

$$a_2 = 36, \quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

등비수열 = 자연수 정의역 지수함수

↓

자유도 2 : 정보 2개 줘야 확정

. $a_2 = 36$

. $a_7 = \frac{1}{3}a_5$ $\Leftrightarrow$ $r^2 = \frac{1}{3}$

동치, 필요충분조건

1차원 운동

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다// 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

$\boxed{\Delta x = \int v\,dt}$, $s = \int |v|\,dt$.

$x|_{t=1} - x|_{t=0} = \int_0^1 v(t)\,dt \longrightarrow k = ☆$

\# 도함수 부호전환 #정.정.함

20. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$$

빼줘야 양변 미분 가능

발상1 정적분으로 정의된 함수 → 대입, 미분

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

극값 자체는 미분과 연관 없이 정의되지만,
미분가능한 함수가 극값을 가지면 도함수 부호가 전환 됐다는 뜻이야 (ft. 한완수 수1/수2 part1)

$$\boxed{g(a)=0}$$

$$g(x)=\int_a^x\left[f(x)\times\{f(t)\}^4-\{f(t)\}^5\right]dt$$

$$=\int_a^x f(x)\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$$

$$=f(x)\cdot\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$$

$$g'(x)=f'(x)\cdot\int_a^x\{f(t)\}^4dt+f(x)\cdot\{f(x)\}^4-\{f(x)\}^5$$

$$=f'(x)\cdot\boxed{\int_a^x\{f(t)\}^4dt}=h(x)$$

발상2 정적분으로 정의된 함수 뜨면 명명

발상1 정.정.함 → 대입, 미분

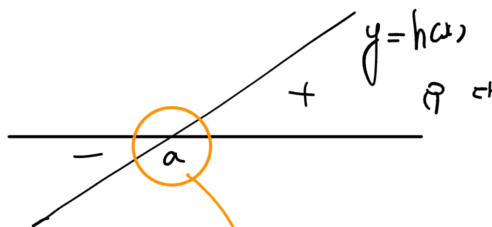
$$g'(x)=f'(x)h(x)\rightarrow\begin{cases}h(a)=0\\ h'(x)=\{f(x)\}^4\geq 0\end{cases}$$

발상3 도함수는 부호만 알면 된다

$y=\{f(x)\}^4$는 $\log 12$이기 때문에 대부분의 x값에서

$\{f(x)\}^4>0 \iff h'(x)>0 \implies \boxed{h(x)\ \text{증가}}$ 임을 예측 가능

왼쪽 위 보면 실제로 $\{f(x)\}^4=0$ 만족 x값이 1개밖에 없다

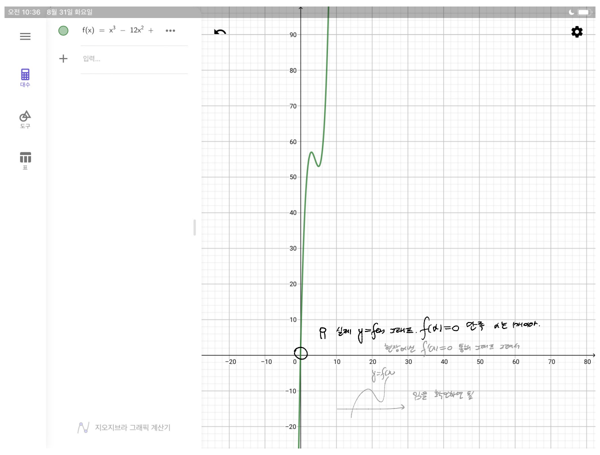


대충 이런 감정

$y=g'(x)$의 부호전환을 봐야하는데 $f'(x)=3(x-3)(x-5)$이므로

$g'(x) \sim \boxed{(x-3)(x-5)h(x)}$ 다. (부호 전환만 고려)

$a=3$ or $a=5$여야 극값 1개다



$$g(x)=\int_a^x(x-t)f(t)dt$$

$$=\int_a^x\{xf(t)-tf(t)\}dt$$

$$=\int_a^x xf(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$$

$$=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$$

$$g'(x)=\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$$

$$=\boxed{\int_a^x f(t)dt}=h(x)\longrightarrow h(a)=0,\ h'(x)=f(x)$$

$$\iff \boxed{g(a)=g'(a)=0},\ g''(x)=f(x)$$

$y=g(x)$가 다항함수라면,
$g(x)=(x-a)^2Q(x)$ (ft. 한완수 수1/수2 part1)

같은 과정

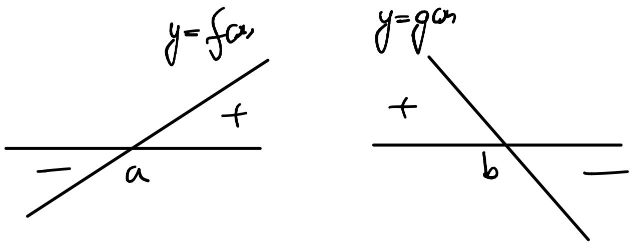
'본질'에 집중하자 수능, 평가원은 새로운 거 안낸다

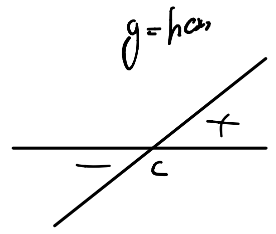
< 박정민의 시각 (추가문제) >

⊕ $\boxed{y=f(x)g(x)h(x)}$

$y=i'(x)$라 할 때, $i(x)$가 오직 하나의 극값을 가질 조건은?

본질적으로 같은 문제다





<작년 수능 (나)>

20. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

본질적으로 똑같은 문제. 심지어 정적분으로 정의된 함수까지.

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t^2 f(t)\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

~~# 거듭제곱근~~

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(발장1) 예시 들어 핵심 파악

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

? sol2 안보이면 언제든 구사할수 있어야

sol1) 귀납 (내 현장풀이)

$n=1$, $(x-64)f(x)=0$

$\boxed{n=2}$, $(x^2-64)f(x)=0$

$n=3$, $(x^3-64)f(x)=0$

$\boxed{n=4}$, $(x^4-64)f(x)=0$

$n=5$, $(x^5-64)f(x)=0$

$\boxed{n=6}$, $(x^6-64)f(x)=0$

$n=7$, $(x^7-64)f(x)=0$

홀수일 때는 실근이 1개밖에 안돼서 X

짝수는 다 되나?

$n=8$, $(x^8-64)f(x)=0$

어 이럼 $f(x)=x^2-2\sqrt{2}$ 인데 (나) 모순이야

$n=10$, $(x^{10}-64)f(x)=0$

$f(x)=x^2-2^{\frac{6}{5}}$ 이라 (나) 모순

$\boxed{n=12}$, $(x^{12}-64)f(x)=0$

$f(x)=x^2-2$ 라 된다

$n=14$, $(x^{14}-64)f(x)=0$

$f(x)=x^2-2^{\frac{6}{7}}$ X

$n=16$, $(x^{16}-64)f(x)=0$

$f(x)=x^2-2^{\frac{3}{4}}$ X

$n=18$, $(x^{18}-64)f(x)=0$

$f(x)=x^2-2^{\frac{1}{3}}$

$f(x)=x^2-2^p$ 꼴에서 $\boxed{n^+ \propto p^-}$ 이고 $0<p<1$일 땐 $2^p \neq$ 정수이니 더 볼 필요 없겠다

예시 들어 규칙성 발견

sol2) 연역

$n=2k$ (k는 자연수) 일 때, 성립 여지 O

$$\underbrace{(x^{2k}-64)}f(x)=0$$

$\Leftrightarrow x^{2k}=2^6$

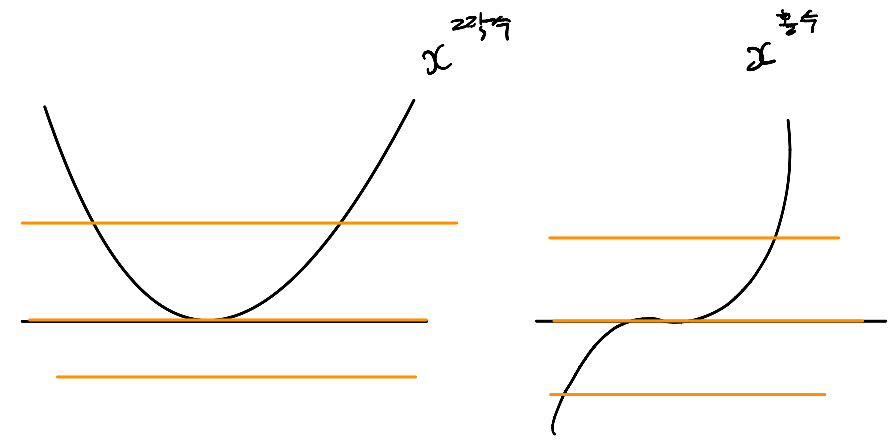
$\Leftrightarrow x=\pm 2^{\frac{3}{k}} \longrightarrow f(x)=(x-2^{\frac{3}{k}})(x+2^{\frac{3}{k}})$

$=x^2-\boxed{2^{\frac{6}{k}}}$ 가 정수

$\rightarrow k=1,2,3,6$

$n=2,4,6,12$

<거듭제곱근 - 실근 개수>



$x^{\square}=a$

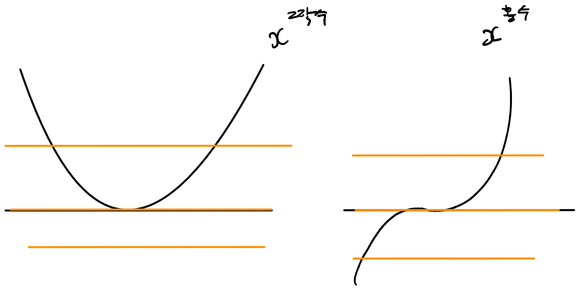
$\square$ 짝수 $\longrightarrow$ 만족 x $\square$개
- $a>0$, 만족 실수 x 2개
- $a=0$, 만족 실수 x 1개
- $a<0$, 만족 실수 x 0개

? 기본적으로 n차방정식의 해는 n개다

$\square$ 홀수 $\longrightarrow$ 만족 x $\square$개 $\longrightarrow$ 만족 실수 x 1개

< 연습용 - 내가 만든 문제 >

< 거듭제곱근 - 실근 개수 >



$x^{\square} = a$

$\square$ 짝수 ⟶ 만족 x $\square$개

- $a>0$, 만족 실수 x 2개
- $a=0$, 만족 실수 x 1개
- $a<0$, 만족 실수 x 0개

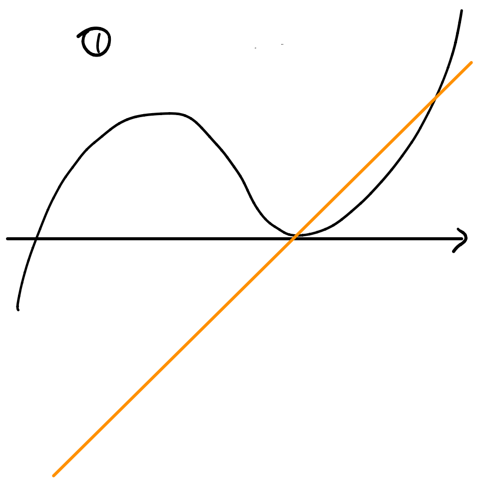
$\square$ 홀수 ⟶ 만족 x $\square$개 ⟶ 만족 실수 x 1개

거듭제곱근

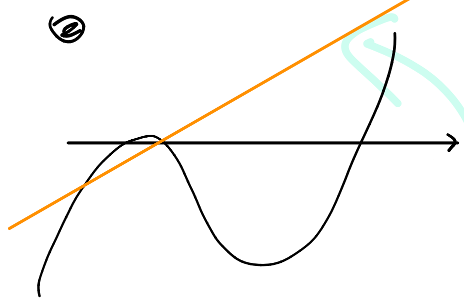
10. 자연수 n에 대하여 $(n-3)^2(n-6)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

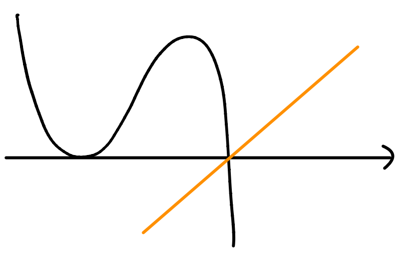
① 이미 하나만 그어도 3개. → 초과하는 개수가 됨수



②

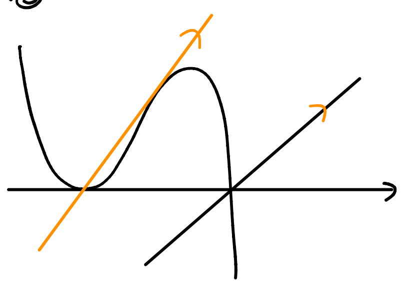


③ 한 쪽에서 1개 → 다른 쪽에서 2개

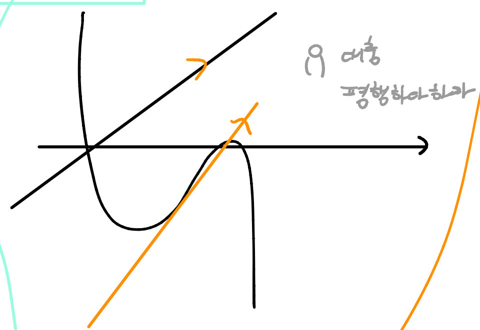


④

③

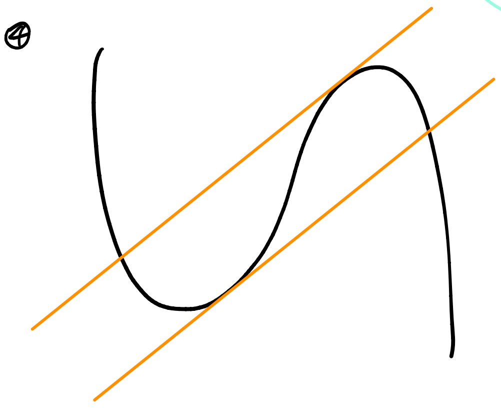


④ 2개가 뜨려면 접해야 함



$y=f(x)$ 위 $(1,4)$에서의 접선은 $y=(x-1)+4$다.

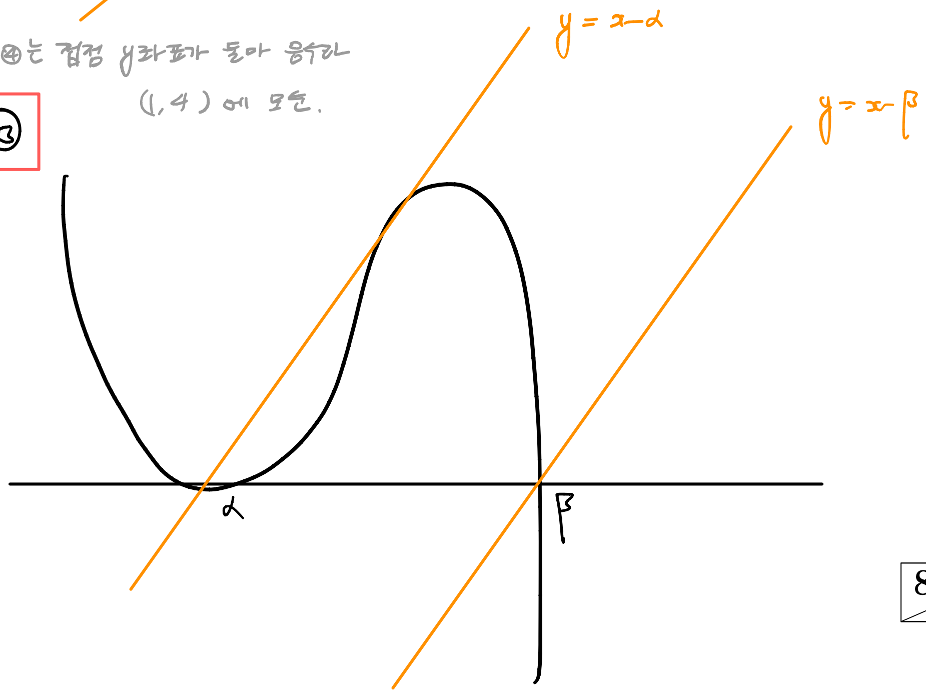
③, ④



변곡접선이면 1개 이므로,
변곡접선 기울기보다 기울기가
작은 직선이어야 한다.
즉, 기울기가 1인 접선은
두 경우 모두 2개 존재한다.

④는 접점 y좌표가 모두 음수라 $(1,4)$에 모순.

③



합성방정식

발상: 평가원은 문제를 아름답게 만든다. "왜 이렇게 조건을 줬을까"를 고민하라

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

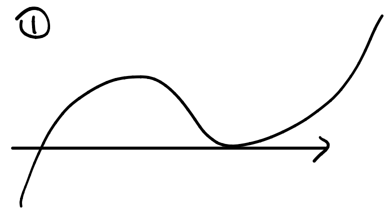
(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(\boxed{x}-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(나) 해석해보면 $y=f(x)$와 $y=x-\alpha$가 접하는데, $y=x-\alpha$의 기울기가 1이므로 꽤나 큰 힌트임

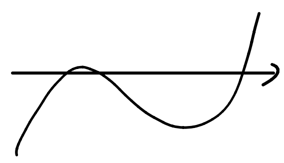
$f(1)=4$, $f'(1)=\boxed{1}$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) case = 4.

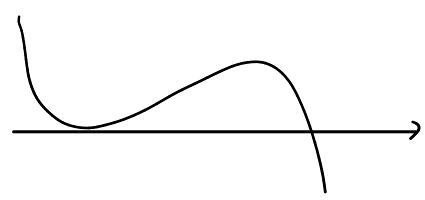
①



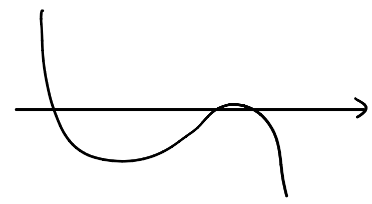
②



③



④

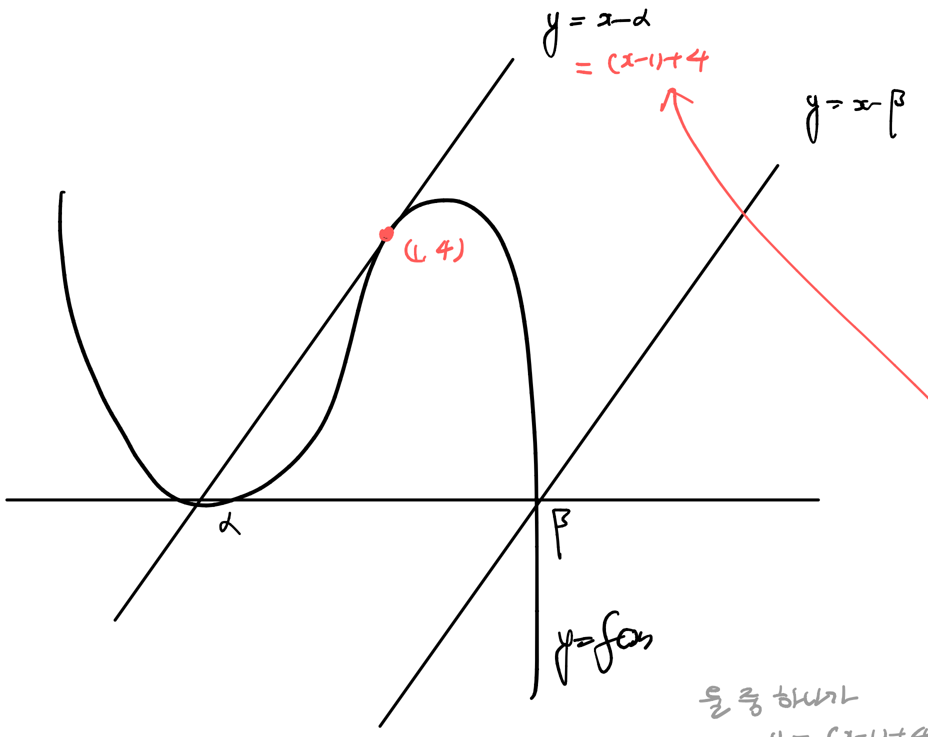


(나) 두 근을 α, β라 하자.

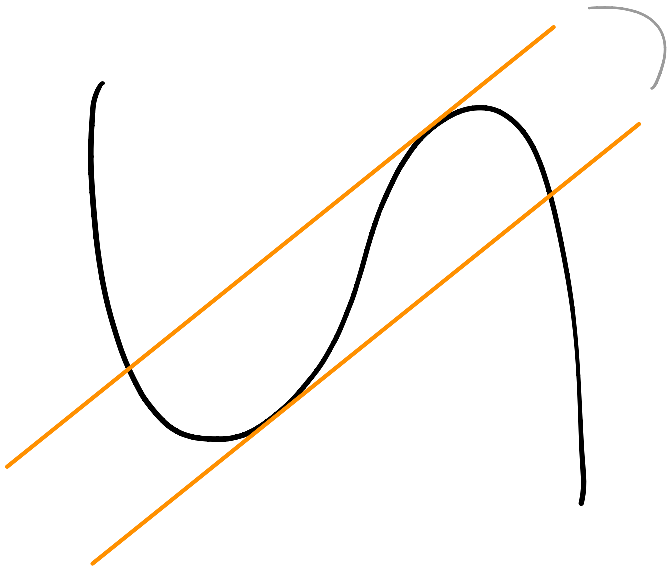
$f(x)=0 \quad \langle x=\alpha \text{ or } x=\beta \rangle$

$f(x-f(x))=0 \quad \boxed{\langle x-f(x)=\alpha \text{ or } x-f(x)=\beta \rangle}$

$\Leftrightarrow$ $x-\alpha=f(x)$ or $x-\beta=f(x)$ 만족 서로 다른 x 3개



물 중 하나가
$y=(x-1)+4$인데,
이게 $y=x-\alpha$가
아니면 문제를 냈을까?



위를 이용해 식을 잡자

$f(x)-(x-\alpha)=k(x-1)^2(x-\alpha) \quad (\alpha=-3)$

$\Leftrightarrow f(x)=(x+3)\{1+k(x-1)^2\}$ $\quad 1+k(-3-1)^2=0$, $\boxed{k=-\frac{1}{16}}$

이때 $y=f(x)$는 $x=\alpha(=-3)$ 에서 접하므로

$f(x)=(x+3)\{(x+3)\,\textcircled{1}(x)\}$ 꼴이다.

$\therefore f(x)=(x+3)\{1-\frac{1}{16}(x-1)^2\}$

$f(0)=3\cdot\frac{15}{16}=\frac{45}{16}$

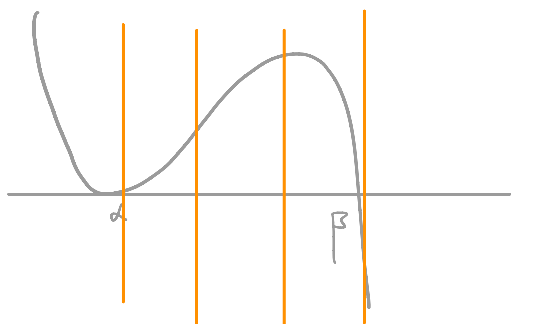
22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

물론 아닐 수도 있다.

다른 경우라면,



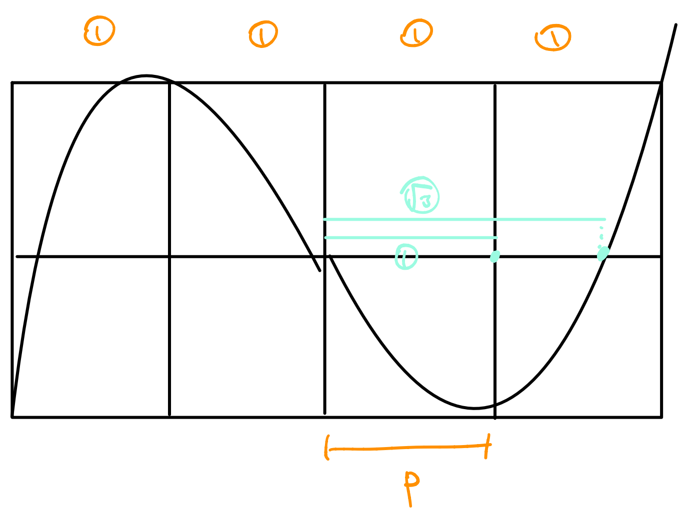
└ 변곡점 x좌표 $=\frac{2\alpha+\beta}{3}$

이용해서 $\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}, f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)\right)$과 $(1, f(1))$의 1:2 외분점이

$y=f(x)$와 $y=x-\alpha$의 접점 X.

$\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}, f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)\right)$과 점 X의 1:3 외분점이 $(\alpha, f(\alpha))$ 풀면 된다

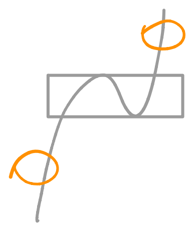
<deg 3> 나는 deg 3 뜨면 8칸부터 그리는 편



$4\times p^3\times$ ◯
|최고차항 계수|
'원함수 높이라는 도함수 넓이'의 공식화다

⊕ '직선과의 교점' 등이 중요할 때는
8칸에서 끝내지 말고 $\pm\infty$도 그려라

e.g.)



그래야 순간적인 무지성 실수 막아 의문사 피할 수 있다

〈 작년 수능 (가) 〉

수학 영역

합성함수 그래프

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

절댓값 함수의 미분가능성 # 합성함수 미분

28. 두 상수 a, $b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
>
> (나) $h'(3)=2$

< 연습용 - 내가 만든 문제 >

합성함수의 그래프

22. 함수 $f(x)=6x^2-x^3$와 최고차항의 계수가 -1이고 최댓값이 6인 사차함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x)=f(g(x))$$

가 $x=\alpha$에서 극소인 모든 α를 크기순으로 나열한 것이 α_1, α_2, $\cdots$, α_m이고 $h(x)$가 $x=\beta$에서 극대인 모든 β를 크기순으로 나열한 것이 β_1, β_2, $\cdots$, β_n일 때, m, n, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $3m=4n$
(나) $g'(\beta_1)\times g'(\beta_n)\neq 0$
(다) 집합 $\{h(t)\,|\,h'(t)=0\}$의 원소의 개수는 2이다.

$(\alpha_{m-1}-\alpha_2)\times(\beta_n-\beta_1)$의 값을 구하여라. [4점]

제 2 교시 수학 영역(미적분)

\# 수열의 극한

23. $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

① $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

② $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ $\boxed{(b_n \neq 0,\ \beta \neq 0)}$

(분모) → 0 이므로 ③ 못 쓴다

⇓

(분모) ↛ 0 과 "수렴하는 수열"로 나타내야 한다

\# 매개변수 미분

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = e^t + \cos t, \quad y = \sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

합성함수, 역함수, 음함수, 매개변수 미분은 본질적으로 같다

① $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{dg(x)}{dx} \cdot \boxed{\frac{d}{dg(x)}[f(g(x))]} = g'(x) \cdot f'(g(x))$

② $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x \rightarrow f^{-1\prime}(y)\,dy = dx$

③ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cdots$

④ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

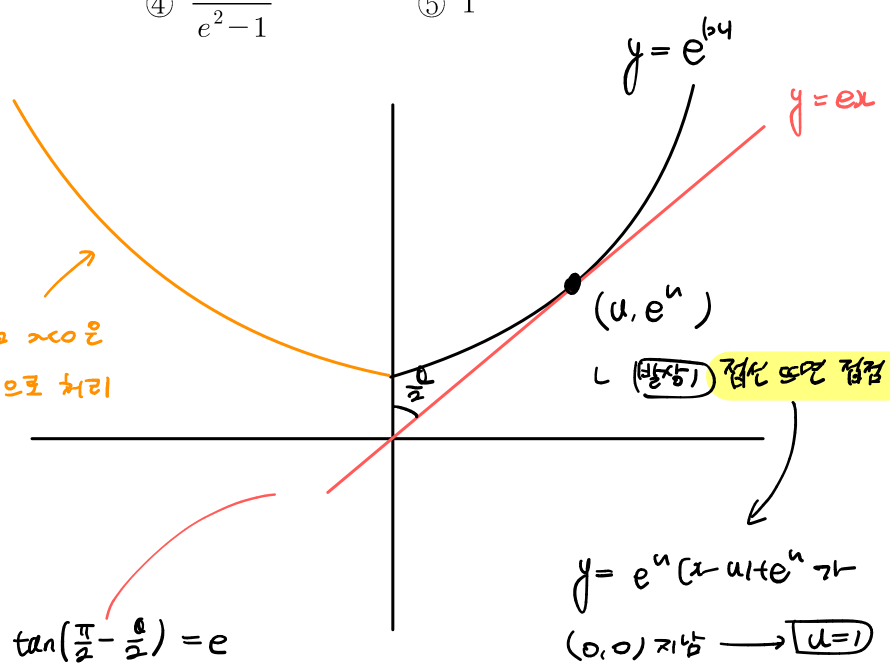
$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \quad (x = g(x))$

\# 삼각함수 덧셈정리

25. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\dfrac{e}{e^2+1}$ ② $\dfrac{e}{e^2-1}$ ③ $\dfrac{2e}{e^2+1}$

④ $\dfrac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1



$x\ge0$ 그래프 $x<0$은 대칭으로 처리

└ (발상) 접선 또는 접점 명명

$y=e^a(x-a)+e^a$가 $(0,0)$ 지남 $\longrightarrow \boxed{a=1}$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=e$

$\Leftrightarrow \tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow \tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

〈덧셈정리〉

- $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

- $\sin2x=2\sin x\cos x$
- $\cos2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$
- $\tan2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2x}$

- $\sin^2\frac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$
- $\cos^2\frac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$
- $\tan^2\frac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

(+) $\sin3x=\sin(x+2x)$
$\cos3x=\cos(x+2x)$
$\tan3x=\tan(x+2x)$

연습할 겸 증명해보자

< 등비급수 도형 >

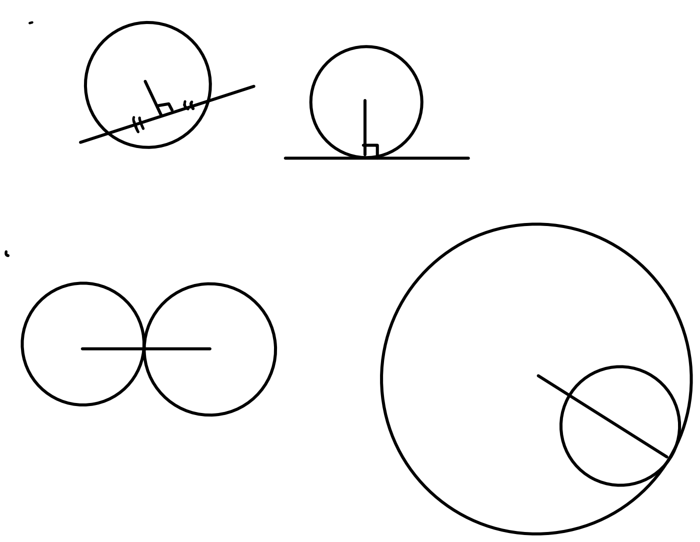
· 닮음 O ⟶ 닮음비 활용

· 닮음 X ⟶ 직접 $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ 구하기

Q 항을 구하라는 게 아니라

(항) 항 / 항 이런 느낌

· 개수 추고려



④ 다각형끼리 한 점에서 만남 (책에는 '접한다'고 되어있는데 이는 미분계수 =, 함숫값 = 을 의미해서 고등학교 과정상 틀린 설명. 다각형은 꼭짓점에서 미분 불가해 미분계수 존재 X)

⟶ 미지수 잡고 아는 정보로 표현

평면기하 - 등비급수 도형, sin 법칙

26. 그림과 같이 중심이 $\mathrm{O_1}$, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1O_2}$가 있다. 호 $\mathrm{A_1O_2}$ 위에 점 $\mathrm{B_1}$을 $\angle \mathrm{A_1O_1B_1} = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1B_1}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

원의 일부 (n원)

그림 R_1에서 점 $\mathrm{O_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{O_1A_1}$에 평행한 직선이 직선 $\mathrm{O_1B_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$라 하자. 중심이 $\mathrm{O_2}$이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $\mathrm{O_2A_2O_3}$을 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1B_1}$과 겹치지 않도록 그린다. 호 $\mathrm{A_2O_3}$ 위에 점 $\mathrm{B_2}$를 $\angle \mathrm{A_2O_2B_2} = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $\mathrm{O_2A_2B_2}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

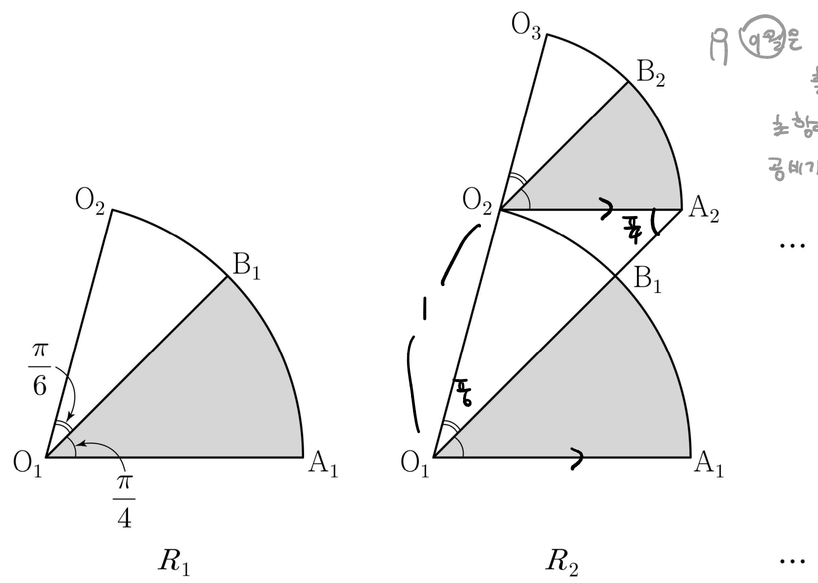
⟶ 엇각, 동위각

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

6월

미적분 도형 ⟨ 무한 등비급수 [3점] / 삼각함수 극한 [4점]

Q 9월은 [4점]으로 출제되지 않을까. 초항이 변신이거나, 공비가 변신이거나...

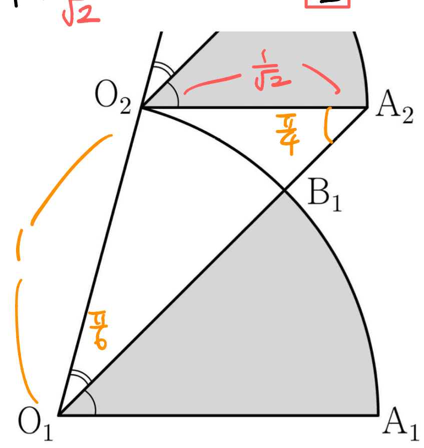


① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

초항 $\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{4}$

공비 $1 : \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow 1 : \boxed{\frac{1}{2}}$

주로 넓이 묻는 추세이긴 한데, (길이면 그냥 / 넓이면 $\square^2$ / 부피면 $\square^3$



정보 3개 앎으로 … $\triangle \mathrm{O_1O_2A_2}$ "안다"

$\frac{x}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}$

~~접한다~~

27. 두 함수

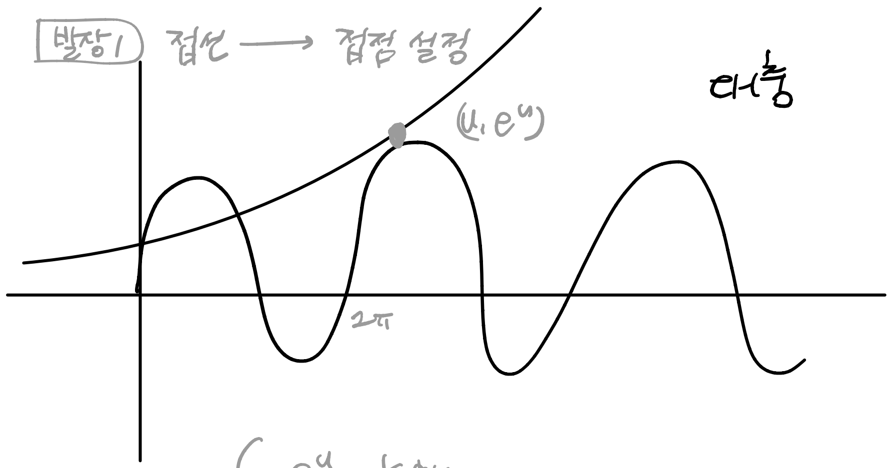
$$f(x)=e^x, \quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$ ④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

$\boxed{\text{발상1}}$ 접선 ⟶ 접점 설정

대충



$$\begin{cases} e^u = k\sin u \\ e^u = k\cos u \end{cases} \quad (2\pi < u < 2\pi + \frac{\pi}{2})$$

$$(t, f(t)) \rightarrow y = f'(t)(x-t) + f(t)$$

$$(t, f(t)) \rightarrow \begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases}$$

⊕ $f(b)-f(a) \rightarrow \int_a^b f'(x)dx$ 원함수 높이차는 도함수 넓이

⊕ $f(b)-f(a) \rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times (b-a)$ 상수X 기울기

⊕ 미적 ⟶ MVT (평균값 정리)

< 연습용 - 내가 만든 문제 >

[발상] 접선 ⟶ 접점 설정

접한다

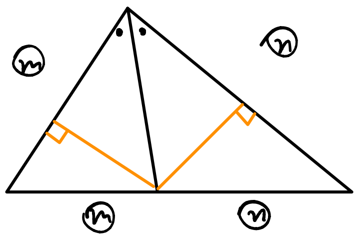
26. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x & (x\neq 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y=\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}$에 접하고 기울기가 2인 두 직선의 y절편의 곱은? [3점]

① -6 ② -9 ③ -12
④ -15 ⑤ -18

<각의 이등분선 정리>

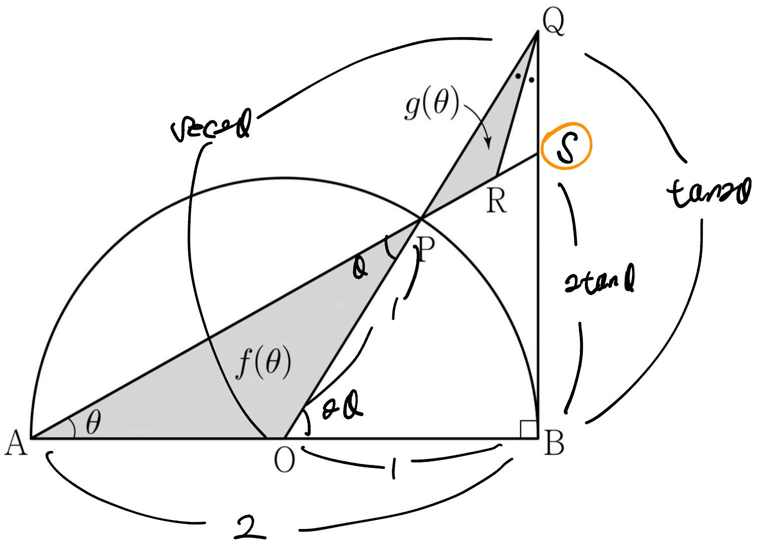


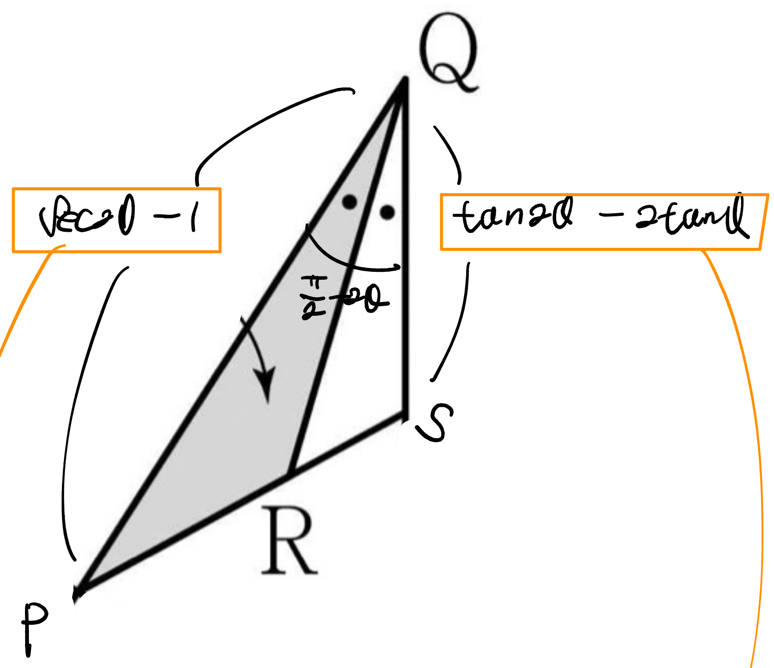
pf.) 넓이 비

pf₂)

평면 기하 - 삼각함수 극한 (선형 근사), 각의 이등분선 정리

sol.) 점 "S" 잡고 △QRS 이용 (각의 이등분선)





$\frac{1}{\cos 2\theta} - 1 = \frac{1}{\cos 2\theta}(1-\cos 2\theta) \sim \frac{1}{2}(2\theta)^2 = \boxed{2\theta^2}$

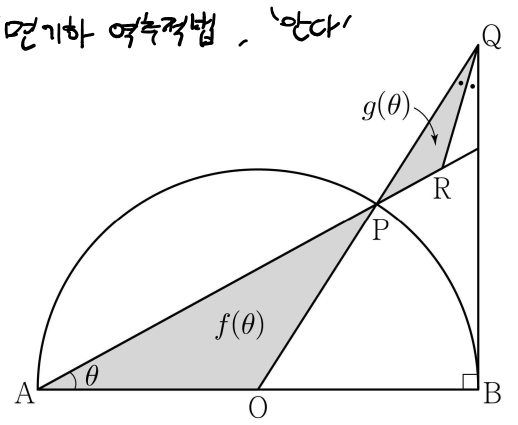
$\tan 2\theta - 2\tan\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} - 2\tan\theta$

$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\{1-(1-\tan^2\theta)\} \sim \boxed{2\theta^3}$

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, ∠OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. ∠OAP = θ일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

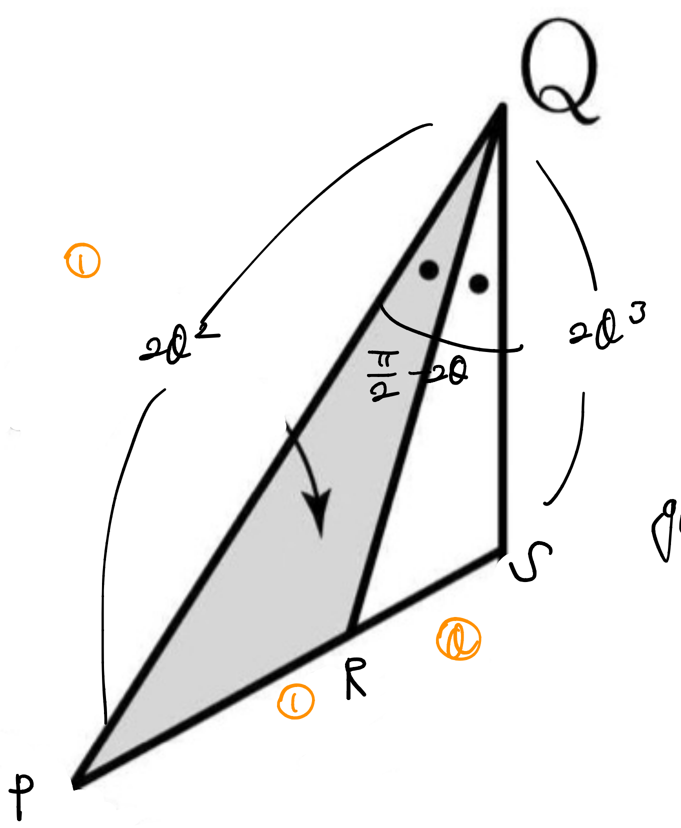
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

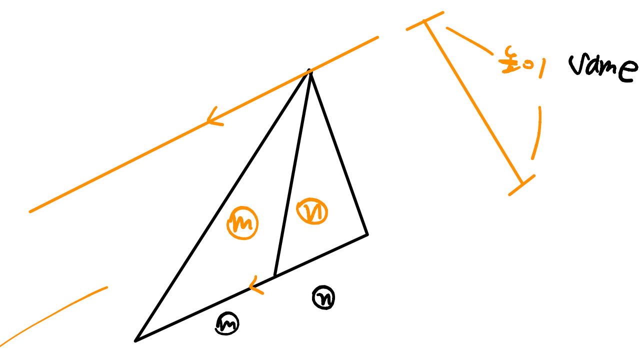
발상) 평면기하 역추적법, '안다'



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$f(\theta) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin(\pi - 2\theta) \sim \boxed{\theta}$





$g(\theta) = \frac{1}{2}\,\overline{PQ} \times \overline{QS} \times \sin(\angle PQS) \times \boxed{\frac{\overline{PR}}{\overline{PR}+\overline{RS}}}$

$\sim \frac{1}{2}\,2\theta^2 \cdot 2\theta^3 \cdot \frac{1}{\theta+1}$

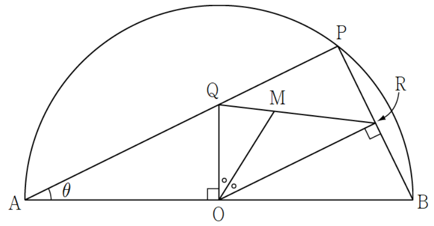
$\sim \boxed{2\theta^5}$

< 연습용 - 내가 만든 문제>

평면기하 -- 삼각함수 극한, 각의 이등분선 정리

암산으로 1분 내에 풀이 끝내고 시작!

28. $\overline{AB}=2$인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P가 있고, $\angle PAB=\theta$이다. 선분 AP 위의 점 Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발 O가 선분 AB의 중점이고, 점 R은 점 O에서 선분 BP에 내린 수선의 발이다. $\angle QOR$를 이등분하는 직선과 선분 QR의 교점을 M이라 할 때, 삼각형 OQM의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? [4점]

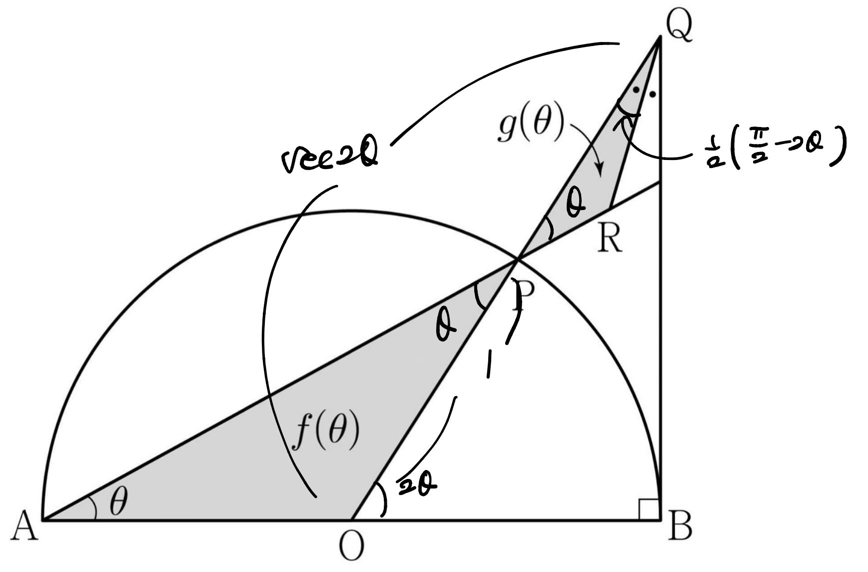


① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

※ sol₁의 $\boxed{\text{점 } S}$가 명명되지 않은 것으로 보아, 평가원의 의도는 sol₂의 $\boxed{\sin \text{법칙}}$ 아니었을까..

평면 기하 - 삼각함수 극한 (선형 근사), sin법칙

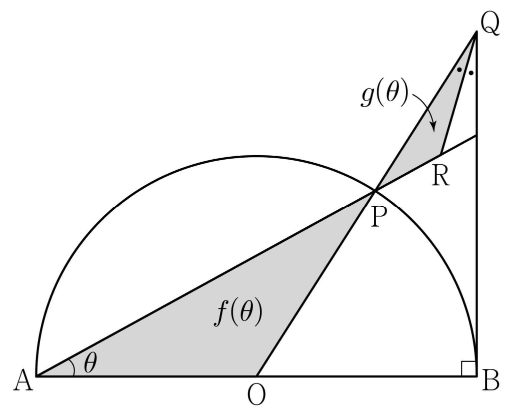
sol₂) <각의 이등분선 정리> 없이 sin법칙 (a.k.a. 多각)



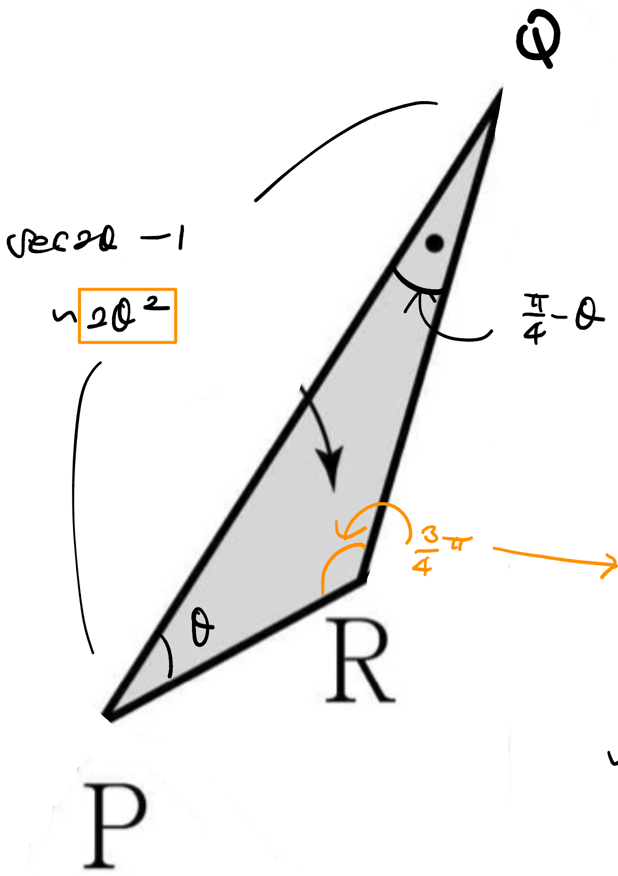
28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, ∠OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. ∠OAP $= \theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

※ 수능에 삼각함수 도형 극한이 나오면 분명 안보이고 복잡한 상황일 것. 당황하지 말고 안보이면 넘어갔다가 다시 오기.

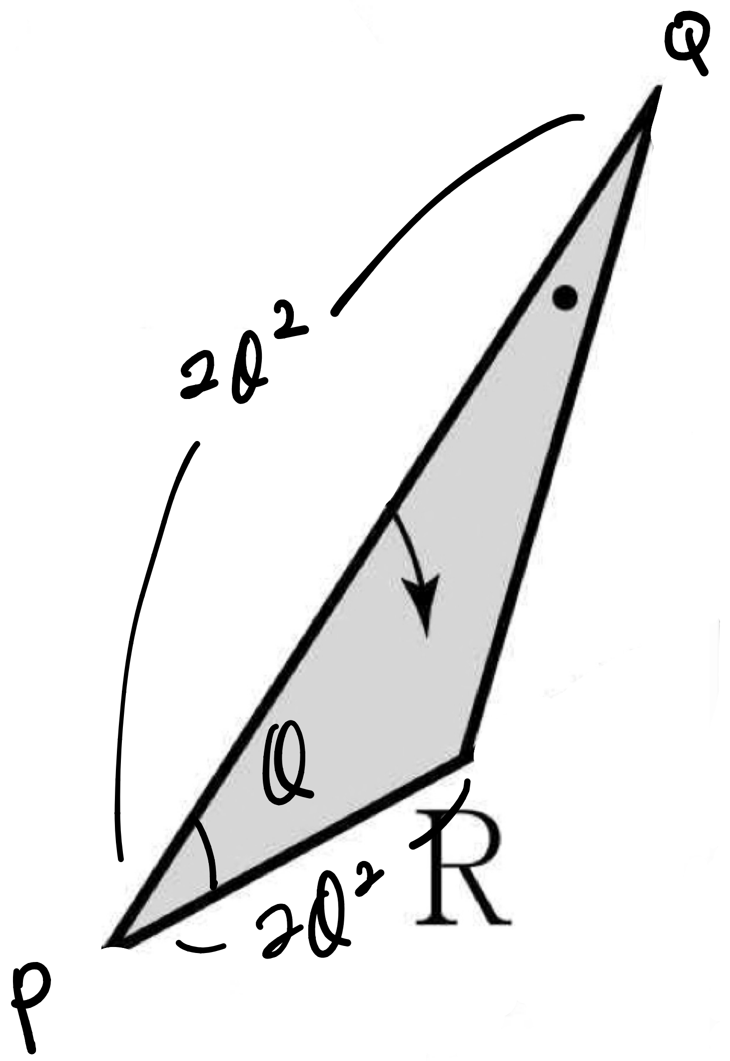


① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4



$$\frac{2\theta^2}{\sin\frac{3}{4}\pi} = \frac{\overline{PR}}{\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}$$

$$\sim \frac{2\theta^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\overline{PR}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \overline{PR} \sim \boxed{2\theta^2}$$



$$g(\theta) = \frac{1}{2}\, 2\theta^2 \cdot 2\theta^2 \sin\theta$$

$$\sim \boxed{2\theta^5}$$

<선형 근사>

$\theta \to 0$)

- $\sin\theta \sim \theta$
- $\cos\theta \sim 1$
- $\tan\theta \sim \theta$
- $1-\cos\theta \sim \frac{1}{2}\theta^2$

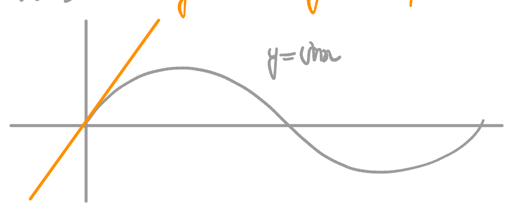
⊕ pf₁) 테일러 급수

$$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

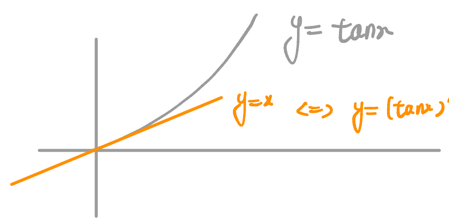
$$\cos x = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

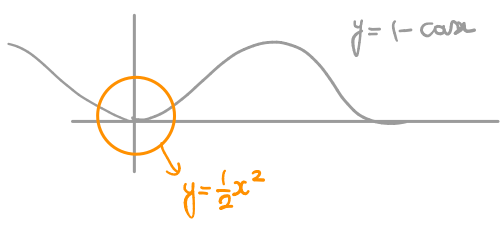
pf₂)

$y=x \iff y=(\sin x)'|_{x=0}(x-0)+\sin x|_{x=0}$



$y=x \iff y=(\tan x)'|_{x=0}(x-0)+\tan x|_{x=0}$





음함수 미분법

29. $t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

음함수 미분법이다

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} t\ln k = k^2 \\ \ln k + \frac{t}{k}\cdot\frac{dk}{dt} = 2k\cdot\frac{dk}{dt} \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} t=\alpha \\ k=e^2 \\ \frac{dk}{dt}=\,? \end{array}}$

$\alpha = \frac{e^4}{2}$

$\frac{dk}{dt} = \frac{4}{3e^2}$

< 상수함수 미분 vs 음함수 미분 >

$\frac{d}{dx}(3) = 0$ ($\because$ x가 변해도 3은 안변함)

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{d\{f(x)\}}{dx}\cdot\frac{d}{d\{f(x)\}}\{f(x)\} = f'(x)\cdot 1$ ($\because$ x가 변하면 $f(x)$가 변함)

그냥 $\frac{d}{dx}(x)=1$ 이다

$\longrightarrow \frac{d}{dx}(a) = \begin{cases} \frac{da}{dx} & (x\text{가 변할 때 } a \text{ 변하면}) \\ 0 & (x\text{가 변할 때 } a \text{ 안 변하면}) \end{cases}$

합성함수, 역함수, 음함수, 매개변수 미분은 본질적으로 같다

① $\frac{d}{dx}\{f(g(x))\} = \frac{dg(x)}{dx} \cdot \boxed{\frac{d}{dg(x)}\{f(g(x))\}} = g'(x) \cdot f'(g(x))$

② $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x \rightarrow f^{-1\prime}(y)dy = dx$

③ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cdots$

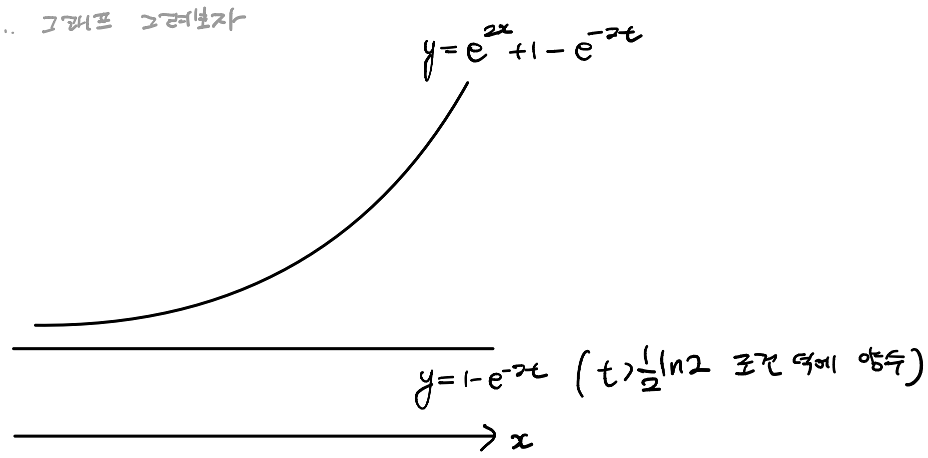
④ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

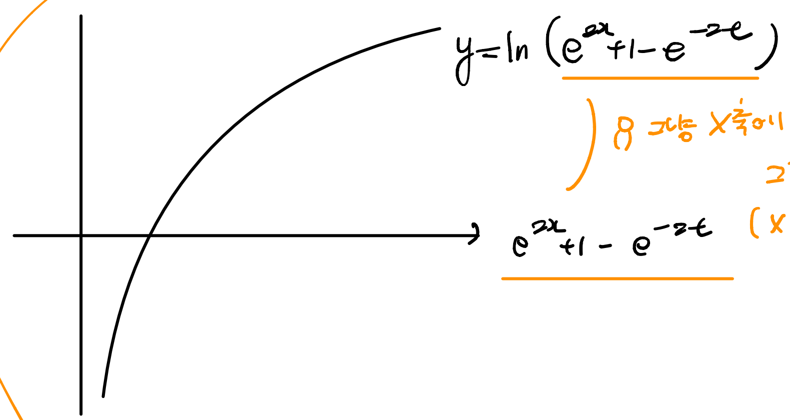
$\frac{d}{dX} f(X) = f'(X) \quad (X = g(x))$

음함수 미분법 or # 합성함수 미분법

30. $t > \frac{1}{2}\ln 2$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $\boxed{y = \ln(1 + e^{2x} - e^{-2t})}$ 과 직선 $y = x + t$ 가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(\ln 2) = \frac{q}{p}\sqrt{2}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

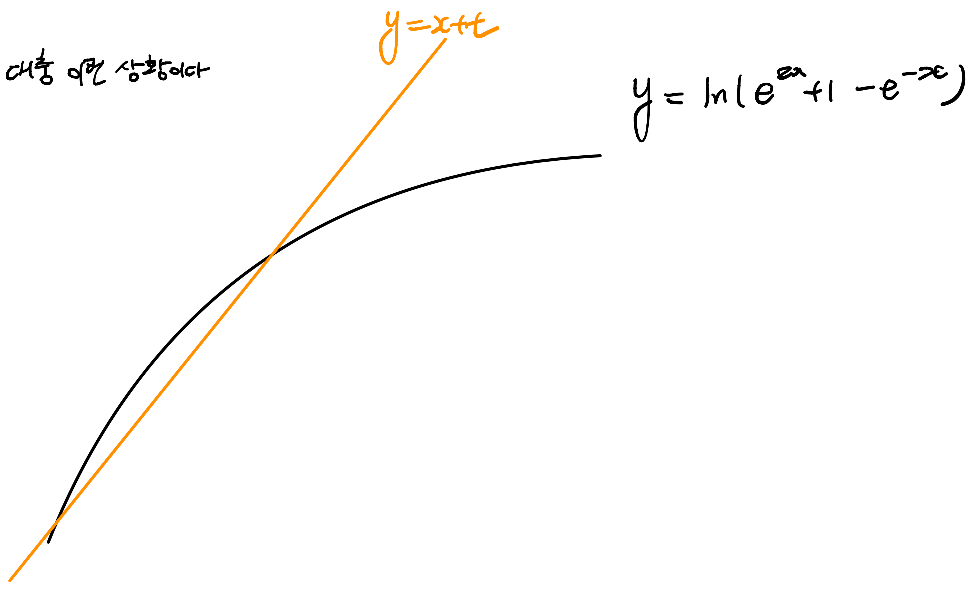
?... 그래프 그려보자



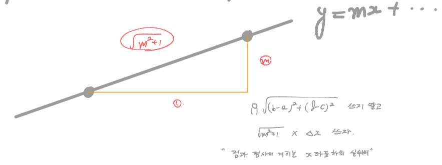


그냥 X축에 $\ln X$ 그린거다 ($X = e^{2x} + 1 - e^{-2t}$)

대충 이런 상황이다

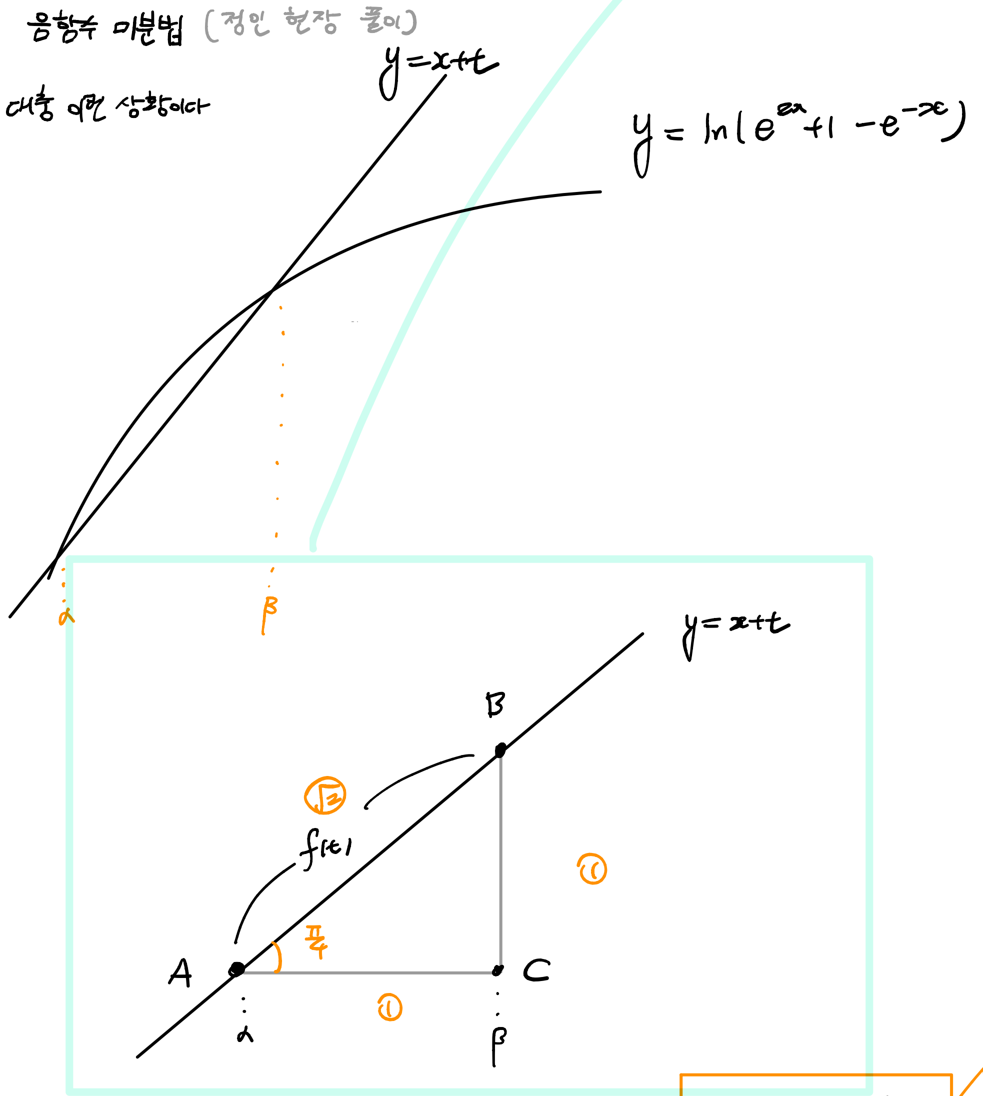


〈점과 점 사이 공식 대체 $-\sqrt{m^2+1}$〉



sol.) 음함수 미분법 (정인 현장 풀이)

대충 이런 상황이다



직선의 기울기가 1이므로 $1:1:\sqrt{2}$ $\longrightarrow$ $\overline{AB}=\boxed{\sqrt{2}(\beta-\alpha)=f(t)}$

$t=\ln 2$, $x+\ln 2=\ln\left(e^{2x}+1-\frac{1}{4}\right)$

〈$x=\alpha$ or $x=\beta$〉

$\Leftrightarrow$ $e^{x+\ln 2}=e^{2x}+1-\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow$ $0=e^{2x}-e^{x+\ln 2}+\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow$ $4(e^x)^2-8e^x+3=0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{x=\ln\frac{3}{2}}$ or $\boxed{x=\ln\frac{1}{2}}$ 아까 $\alpha<\beta$로 잡았지?

β α

㊀ $\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\sqrt{2}\ln 3=f(\ln 2)$

$\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$ 가 필요하므로 $t\neq\ln 2$도 포함하는 일반적인 상황의 항등식을 데려오자

$\ln\left(e^{2x}+1-e^{-2t}\right)=x+t$ 〈$x=\alpha$ or $x=\beta$〉

$\Leftrightarrow$ $e^{2x}+1-e^{-2t}=e^{x+t}$

양변을 $\downarrow$ t로 미분

$e^{2x}\cdot 2\cdot\frac{dx}{dt}+2e^{-2t}=e^{x+t}\left(\frac{dx}{dt}+1\right)$ 〈$x=\alpha$ or $x=\beta$〉

$x=\alpha\left(=\ln\frac{1}{2}\right)$, $\boxed{\frac{d\alpha}{dt}=-1}$

$x=\beta\left(=\ln\frac{3}{2}\right)$, $\boxed{\frac{d\beta}{dt}=\frac{5}{3}}$

$\Big)$ $f'(\ln 2)=\sqrt{2}\left(\frac{d\beta}{dt}-\frac{d\alpha}{dt}\right)$

$=\boxed{\frac{8}{3}\sqrt{2}}$

음함수 미분법

30. $t>\frac{1}{2}\ln 2$ 인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

음함수 미분법이다

발상) 음함수 미분법 뜨면 "~일 때"를 정리하자

$t=\ln 2$ 일 때 $\alpha, \beta, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}=?$

$\alpha=$?

$\beta=$?

$f(t)=\sqrt{2}(\beta-\alpha)=$?

$\frac{d\alpha}{dt}=$?

$\frac{d\beta}{dt}=$?

$f'(t)=\sqrt{2}\left(\frac{d\beta}{dt}-\frac{d\alpha}{dt}\right)=$?

$t=\ln 2$

$\alpha=\ln\frac{1}{2}$

$\beta=\ln\frac{3}{2}$

$f(t)=\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\sqrt{2}\ln 3$

$\frac{d\alpha}{dt}=$?

$\frac{d\beta}{dt}=$?

$f'(t)=\sqrt{2}\left(\frac{d\beta}{dt}-\frac{d\alpha}{dt}\right)=$?

$t=\ln 2$

$\alpha=\ln\frac{1}{2}$

$\beta=\ln\frac{3}{2}$

$f(t)=\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\sqrt{2}\ln 3$

$\frac{d\alpha}{dt}=-1$

$\frac{d\beta}{dt}=\frac{5}{3}$

$f'(t)=\sqrt{2}\left(\frac{d\beta}{dt}-\frac{d\alpha}{dt}\right)=\frac{8}{3}\sqrt{2}$

합성함수 미분

30. $t>\frac{1}{2}\ln 2$ 인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Sol 2) 합성함수 미분 (기만 풀이)

$$\ln(e^{2x}+1-e^{-2t}) = x+t \qquad \cancel{\langle x=\alpha \text{ or } x=\beta \rangle}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}+1-e^{-2t} = e^{x+t}$$

$$\Leftrightarrow (e^{x})^2 - e^{t}\cdot e^{x}+1-e^{-2t}=0$$

$$\Leftrightarrow \{e^{x}-(e^{t}-e^{-t})\}(e^{x}-e^{-t})=0$$

Q 이걸 현장에서 어떻게 보냐고

$$\Leftrightarrow e^{x}=e^{t}-e^{-t} \text{ or } e^{x}=e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow x=\ln(e^{t}-e^{-t}) \text{ or } x=-t$$

$$t=\ln 2)\quad \boxed{x=\ln\frac{3}{2}} \text{ or } \boxed{x=\ln\frac{1}{2}}$$

$$e^{2x}-e^{t+x}+1-e^{-2t}=0 \quad (x=\ln(e^{t}-e^{-t}) \text{ or } x=-t)$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{e^{t}+e^{-t}}{e^{t}-e^{-t}}, \quad \frac{dx}{dt}=-1$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\ln 2}=\frac{5}{3}, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\ln 2}=-1$$

$$f'(\ln 2)=\sqrt{2}\cdot\Delta\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$\therefore 11$

〈 19 수능 (가) 〉

음함수 미분법

30. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

음함수 미분법이다

$t=\frac{1}{3}$

$a=$?

$\frac{da}{dt}=$?

<21 사관>

27. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(2x^2+2x+1)\,(x>0)$과 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $f'(2\ln 5)$의 값은? [3점]

음함수 미분법이다

① $\frac{25}{14}$ ② $\frac{13}{7}$ ③ $\frac{27}{14}$ ④ 2 ⑤ $\frac{29}{14}$

$t = 2\ln 5$

x좌표 $=$?

$\dfrac{d(x\text{좌표})}{dt} =$?