제 2 교시

2023학년도 4월 고3 전국연합학력평가 문제지

수학 영역

성명		수험 번호					3			

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

따스한 강물에 흔들리는 노을

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 선택과목, 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

경기도교육청

수학 영역

5지선다형

1. $\log_6 4 + \dfrac{2}{\log_3 6}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\log_6 4 + 2\log_6 3 = \log_6 4\cdot 9 = 2$

2. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 3$, $\dfrac{a_5}{a_3} = 4$일 때, a_4의 값은? [2점]

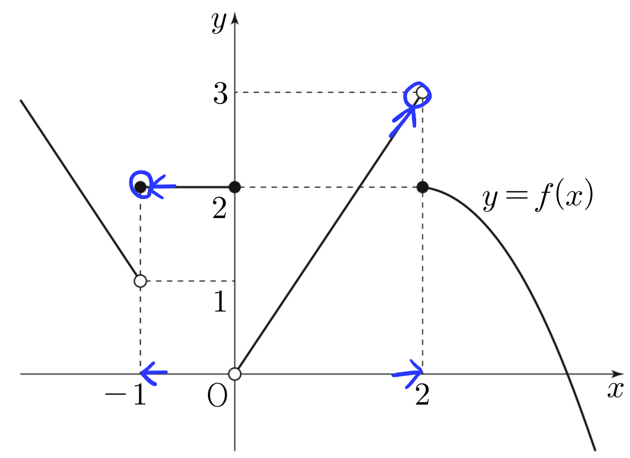
$\rightarrow r>0$

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

$r^2 = 4 \quad \therefore r = 2$

$\therefore a_4 = 3\cdot r^3 = 24$

3. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to -1+} \overset{2}{f(x)} + \lim\limits_{x\to 2-} \overset{3}{f(x)}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 함수 $f(x) = 2x^3 - 6x + a$의 극솟값이 2일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 6x^2 - 6$

$f'(x)$ −1 1 극소

$\therefore f(1) = \cancel{2} - 6 + a = \cancel{2}$

$a = 6$

5. 0이 아닌 모든 실수 h에 대하여 다항함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율이 h^2+2h+3일 때, $f'(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0}(h^2+2h+3) = 3$

6. 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)+b$가 닫힌구간 $[2, 5]$에서 최댓값 3, 최솟값 1을 갖는다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y=-\log_2(x-a)+b$ → 감소함수

$\therefore$ $-\log_2(2-a)+b=3$

$-$ $\underline{\left| -\log_2(5-a)+b=1 \right.}$

$\log_2(5-a)-\log_2(2-a)=2$

$\therefore \frac{5-a}{2-a}=4 \Leftrightarrow 5-a=8-4a$

$\Leftrightarrow a=1$

$-\log_2 1+b=3 \Leftrightarrow b=3$

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이다. 함수 $g(x)=(x+2)f(x)$에 대하여 $g'(0)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$f(0)=-1$

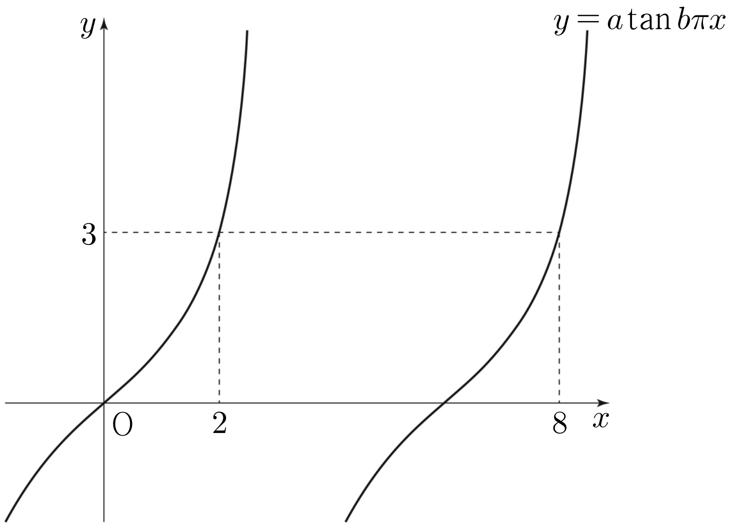
$f'(0)=3$

$\therefore g'(0)=f(0)+2f'(0)$

$=-1+6=5$

$y=x$ ↝ 수직이등변삼각형 계고기
밑 동일 지수함수·로그함수 ↝ 역함수 의심
증가함수는 역함수와 $y=x$ 에서만 만난다.

8. 그림과 같이 함수 $y=a\tan b\pi x$의 그래프가 두 점 $(2,\ 3)$, $(8,\ 3)$을 지날 때, $a^2\times b$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$\frac{\pi}{b\pi}=6$ $\therefore b=\frac{1}{6}$

$a\tan\frac{2\pi}{6}=3$ $\therefore a=\sqrt{3}$

$\lim_{x\to k}\frac{1}{x-k}\int_k^x f(t)dt=f(k)$

9. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x+1$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=f(0)=1$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2+x+1$

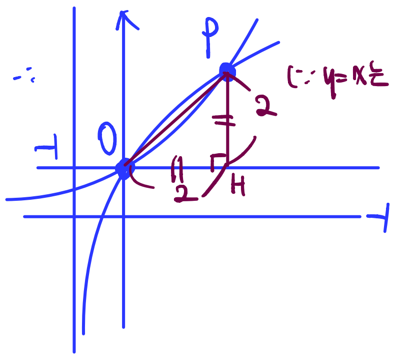
$f(2)=\cancel{2^3}-\cancel{2\cdot 2^2}+2+1=3$

10. 상수 $a\,(a>1)$에 대하여 곡선 $y=a^x-1$과 곡선 $y=\log_a(x+1)$이 원점 O를 포함한 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 OHP의 넓이가 2일 때, a의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

a^x-1 과 $\log_a(x+1)$ 은 역함수 관계라서 $y=x$ 에서 만남

$\therefore$

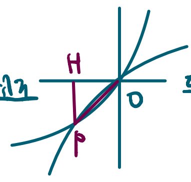


($\because$ $y=x$는 직각 이등변△)

$\therefore$ P(2, 2) 이므로

$a^2-1=2 \Leftrightarrow a=\sqrt{3}$

($\because$ 참고로



될 수 없다. 점근선이 $x=-1$, $y=-1$ 이라서)

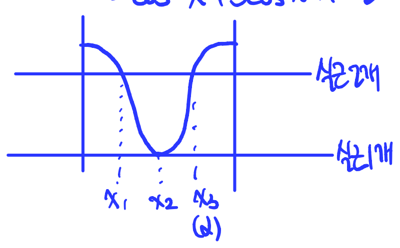
\# 삼각함수 ↝ 최대,최소 이용
\# S,C 둘다 2개, 식 1개 ↝ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 이용
\# 함수세팅: $f(x) - l(x)$ 이용
\# 삼차함수: $3 \times$ 변곡점 x좌표 = 세 근의 합
\# 삼차함수넓이공식 → $\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$
\# 이차함수넓이공식 → $\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

11. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $2\sin^2 x - 3\cos x = k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을 α라 할 때, $k \times \alpha$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{2}\pi$ ② 4π ③ $\frac{9}{2}\pi$ ④ 5π ⑤ $\frac{11}{2}\pi$

$2 - 2\cos^2 x - 3\cos x = k$

$2\cos^2 x + 3\cos x + k - 2 = 0$



$\therefore \cos x = -1$ 만족

$\cancel{2} - 3 + k - \cancel{2} = 0 \Leftrightarrow k = 3$

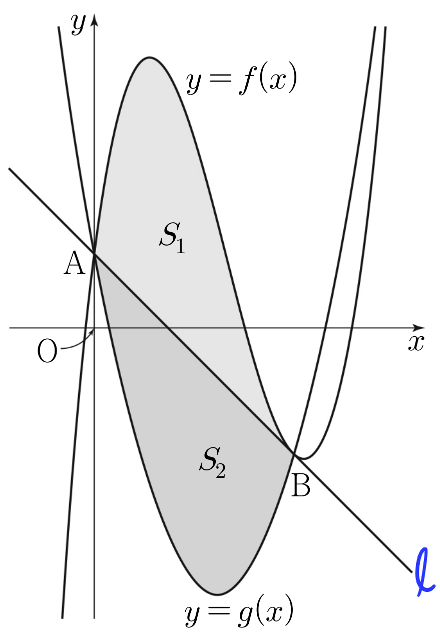
$2c^2 + 3c + 1 = (2c+1)(c+1) = 0$

$\therefore \cos x_1 = \cos x_3 = -\frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 이므로 $\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

$\therefore k\alpha = 4\pi$

12. 그림과 같이 삼차함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y = g(x)$의 그래프가 점 A$(0, 1)$, 점 B$(k, f(k))$에서 만나고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다.
곡선 $y = f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1,
곡선 $y = g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.
$S_1 = S_2$일 때, $\int_0^k g(x)dx$의 값은? (단, k는 양수이다.) [4점]



① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

\# 3변곡점 = 세 근의 합
$0 + 2k = 6 \quad \therefore k = 3$

\# 삼차함수 넓이 공식
$S_1 = \frac{1}{12} \times 3^4 = \frac{27}{4}$

\# 이차함수 넓이 공식
$g(x)$ 최고차항 계수 m이면
$S_2 = \frac{m}{6} \times 3^3 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

$B(3, 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 + 1) = (3, -2)$ 라서

$l = -x + 1$ 이고

$g(x) - l(x) = \frac{3}{2}x(x-3)$

$\Leftrightarrow g(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 1$

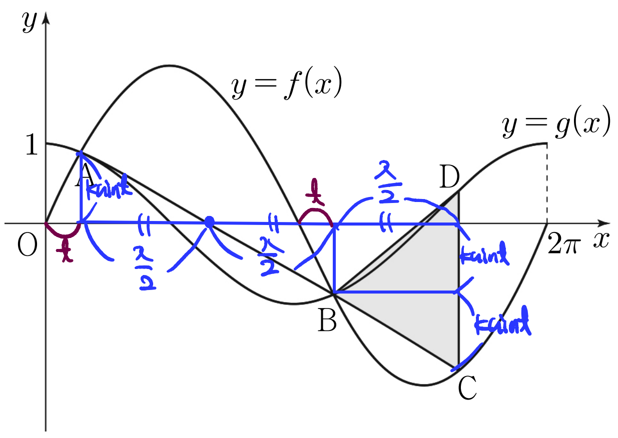
$\therefore \int_0^3 g(x)dx = \frac{3^3}{2} - \frac{11}{4} \cdot 3^2 + 3$

$= \frac{-45}{4} + 3 = -\frac{33}{4}$

삼각함수 ⇒ 주기성 이용
s, c 문자 2개, 식 1개 ⇝ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 이용

px^3+qx 인 삼차함수 ⇒ 기함수
삼차함수 비율관계

13. 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $\dfrac{\sqrt{15}}{8}\pi$　② $\dfrac{9\sqrt{5}}{40}\pi$　③ $\dfrac{\sqrt{5}}{4}\pi$　④ $\dfrac{3\sqrt{10}}{16}\pi$　⑤ $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

A, B 에서 $k\sin t = \cos t$

C 에서 $k\sin(\pi + \frac{\pi}{2} + t) = -2k\sin t$

$-k\sin(\frac{\pi}{2}+t)$
$= -k\sin(\frac{\pi}{2}-t)$
$= -k\cos t$

$\therefore \cos t = 2\sin t$, $k=2$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 5\sin^2 t = 1$

$\therefore \sin t = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos t = \frac{2}{\sqrt{5}}$

D$(t+\pi+\frac{\pi}{2}$, $\cos(\pi+\frac{\pi}{2}+t))$

$= -\cos(\frac{\pi}{2}+t)$
$= \cos(\frac{\pi}{2}-t)$
$= \sin t = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \triangle BCD = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

14. 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-3t^2x$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t)=M_1(t)+M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

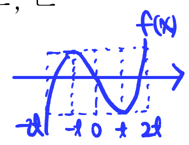
ㄱ. $g(2)=32$

ㄴ. $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=5$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f'(x) = 3x^2 - 3t^2 = 3(x^2 - t^2)$ ∴

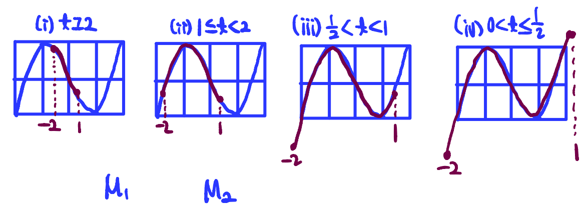


ㄱ.

$M_1 = f(-2) = -8 + 6\cdot 2^2 = 16$
$M_2 = f(-2) = 16$

$\therefore g(-2) = 32$

ㄴ.



참고
($M_1(t)$, $M_2(t)$는 연속이라 $g(t)$도 연속
즉, 부등호는 i, ii, iii, iv 어디에 걸리든 상관없음)

M_1　M_2

$g(t) = \begin{cases} f(-2) + f(-2) = 2f(-2) & (\text{i}: t\ge2) \\ f(-t) + f(-t) = 2f(-t) & (\text{ii}: 1\le t<2) \\ f(-t) + -f(-2) = f(-t)+f(2) & (\text{iii}: \frac{1}{2}<t<1) \\ f(1) + -f(-2) = f(1)+f(2) & (\text{iv}: 0<t\le\frac{1}{2}) \end{cases}$

$\therefore g(t)=2f(-t)$ 만족시키는 t의 값은 $1\le t\le 2$ 이다.

~~ㄷ.~~

$\frac{1}{2}<t<1$ 에서 $g(t) = f(-t)+f(2) = -t^3+3t^3+8-6t^2 = 2t^3-6t^2+8$, $g'(t) = 6t^2-12t$

$0<t<\frac{1}{2}$ 에서 $g(t) = f(1)+f(2) = 1-3t^2+8-6t^2 = -9t^2+9$, $g'(t) = -18t$

$\therefore g'(\frac{1}{2}+) - g'(\frac{1}{2}-) = 6\cdot\frac{1}{4} - 12\cdot\frac{1}{2} + 18\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}-6+9 = \frac{9}{2}$ 이다.

참고
($f(1)$, $f(2)$는 x에 관해서는 정해진 값이지만,
t에 관해서는 t값에 따라 변하는 함수이다.
그래서, t로 미분할 때 날리면 안된다.)

#역추적
정해진 값부터 찾고 케이스 분류

수학 영역

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \frac{M}{m}$의 값은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$

이다.

(나) $a_5 + a_6 = 1$

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

(i) $a_5<1 \rightsquigarrow a_6=2^3=8$ $\therefore a_5+a_6=1$ 이려면 $a_5=-7$

(ii) $a_5\geq 1 \rightsquigarrow a_6=\log_2 a_5 \geq 0$ $\therefore a_5+a_6=1$ 이려면 $a_5=1, a_6=0$

n	a_n (i)	a_n (ii)	
1		$a_1\geq 1$	2^{16}
2		$\uparrow$ $a_2\geq 1$	$\uparrow$ 16
3	$\cancel{2^{2^{-7}}}$ 불가능	$\uparrow$ $a_3<1$	$\uparrow$ 4
4	$\uparrow$ 2^{-7}	2	
5	$\uparrow$ -7	1	
6	8	$\uparrow$ 0	

$\therefore a_1\geq 1$

$\rightsquigarrow a_2=\log_2 a_1\geq 1 \iff a_1\geq 2$

$\rightsquigarrow a_3=\log_2 a_2=\log_2(\log_2 a_1)<1$

$\iff \log_2 a_1<2$

$\iff a_1<4$

$\therefore 2\leq a_1<4$ 또는 $a_1=2^{16}$

$\therefore M=2^{16}, m=2^1$

$\therefore \log_2\frac{M}{m}=15$

단답형

16. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$의 값을 구하시오. [3점]

5

$\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=5$

17. 함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프가 점 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

3

$y=4^{x-1}+a$

$4^{\frac{1}{2}}+a=2+a=5$

$\therefore a=3$

\# 등차수열합 S_n — 기하적 접근: 이차함수의 일부
— 대수적 접근: (항 개수) × (평균값) $= n \times \frac{a_1 + a_n}{2}$

18. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{xf(x) - 2x^3 + 1}{x^2} = 5,\ f(0) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

8

$f(x) = 2x^2 + 5x + c$

$f(0) = c = 1$

$\therefore f(1) = 8$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t > 0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t) = \frac{3}{2}t^4 - 8t^3 + 15t^2 - 12t$$

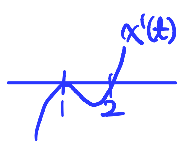
이다. 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

6

$x'(t) = 6t^3 - 24t^2 + 30t - 12$

$= 6(t^3 - 4t^2 + 5t - 2)$

1	1	−4	5	−2
		1	−3	2
1	1	−3	2	0
		1	−2	
2	1	−2	0	
		2		
	1	0		



$\therefore t = 2$에서 바뀜

$x''(t) = 6(3t^2 - 8t + 5)$

$x''(2) = 6(12 - 16 + 5) = 6$

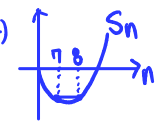
20. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오. [4점]

> (가) S_n은 $n = 7$, $n = 8$에서 최솟값을 갖는다.
> (나) $|S_m| = |S_{2m}| = 162$인 자연수 $m(m > 8)$이 존재한다.

30

(가) $a_8 = 0$ 이고 $d > 0$, $a_1 = -7d$, $a_1 \sim a_7 < 0$, $a_9 \sim > 0$

(나)



이니까 $-S_m = S_{2m} = 162$

$a_m = (m-8)d$, $a_{2m} = (2m-8)d$ 이므로

$-S_m = S_{2m}$

$\Leftrightarrow -\cancel{m} \times \frac{-7\cancel{d} + (m-8)\cancel{d}}{\cancel{2}} = 2\cancel{m} \times \frac{-7\cancel{d} + (2m-8)\cancel{d}}{\cancel{2}}$

$\Leftrightarrow -m + 15 = 4m - 30$

$\Leftrightarrow m = 9$

$\therefore S_m = 162$

$\Leftrightarrow -9 \times \frac{-6d}{2} = \cancel{27}d = \cancel{162}^{6}$

$\Leftrightarrow d = 6$

$\therefore a_{13} = 5d = 30$

\# 수I 범위에서 도형 ┌ sin/cos 법칙
└ 도형의 성질들

\# , ↝ 원 발견하기

\# 정적분 함수 ① 0 or 초기값 대입
② 미분

\# 실수 전체에서 미분가능 ↝ 특이점 (미분불가능의심점) 체크

\# $\sqrt{\ } \ge 0$, $|\ | \ge 0$, $\frac{1}{\ } \to \ne 0$ 놓치지 않기 (증감표에도 체크)

\# 극대·극소 ↝ 기울기 변해야 함

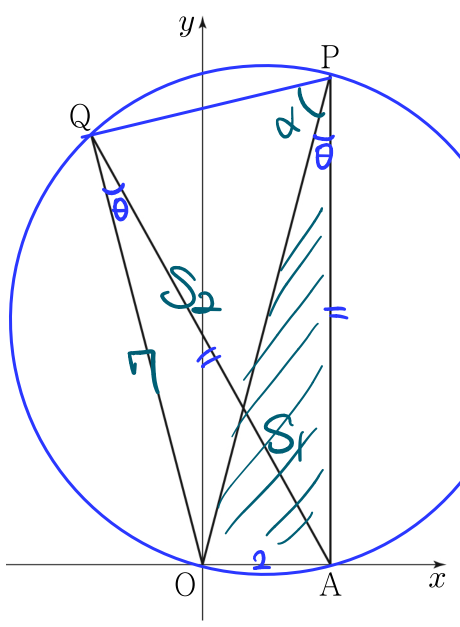
\# 함수세팅 : $f(x) - l(x)$ 이용

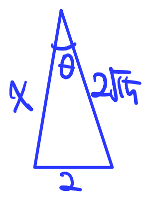
21. 좌표평면 위의 두 점 O(0, 0), A(2, 0)과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AQ}} = 2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}} > \overline{\mathrm{OQ}}$이다.
>
> (나) $\cos(\angle \mathrm{OPA}) = \cos(\angle \mathrm{OQA}) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$ 일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22

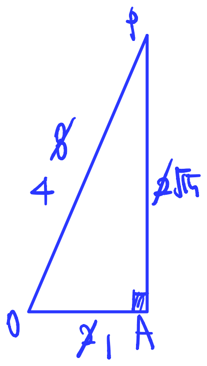




↝ $4 = x^2 + 60 - 2\cdot x \cdot 2\sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\Leftrightarrow x^2 - 15x + 56 = (x-8)(x-7) = 0$

$\therefore \overline{OP} = 8,\ \overline{OQ} = 7$ 이다.



↝ $4^2 = \sqrt{15}^2 + 1^2$ 이므로
∠PAO 직각!
즉, $\overline{PO}$가 지름!

$\therefore S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 2\sqrt{15} = 2\sqrt{15}$

$\frac{7}{\sin\alpha} = \overline{OP} = 8 \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{7}{8},\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$ 이므로

$S_2 = \frac{1}{2} \times 8 \cdot \frac{7}{8} \times 8 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{7}{2}\sqrt{15}$

$\therefore S_1 + S_2 = \frac{11}{2}\sqrt{15}$ 이다.

22. 두 상수 a, $b\,(b \ne 1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) $|x| < 2$일 때, $g(x) = \displaystyle\int_0^x (-t+a)\,dt$이고
> $|x| \ge 2$일 때, $|g'(x)| = f(x)$이다.
>
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$g(k) = 0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p + q\sqrt{3}$ 일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

32

$-2<x<2$ ↝ $g(0)=0$. $g(x) = -\frac{x^2}{2} + ax$. $g'(x) = -x + a$

$\therefore$ (다) $g'(1) = -1 + a = 0 \Leftrightarrow a = 1$

$g(x)$ 실수전체에서 미분가능이므로

$g'(2) = g'(2-) = -1$ 이고 $f(2) = 1$

$g'(-2) = g'(-2+) = 3$ 이고 $f(-2) = 3$

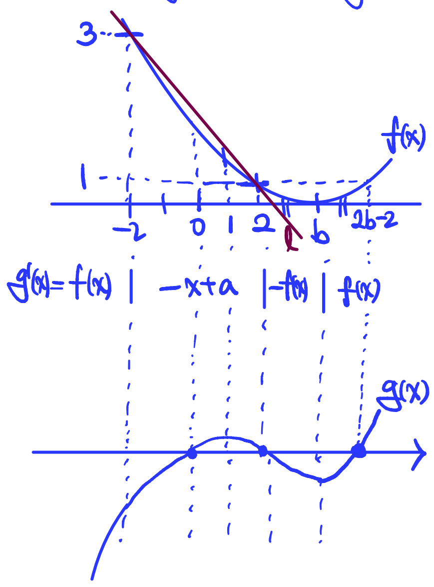
$x<-2$ or $x>2$ 일때 $|g'(x)| = f(x)$ 이므로 $f(x) \ge 0$ 이다.

$-2<x<2$ 일 때 $g'(x) = 0$ 은 $x=1$ 밖에 없으니 $|b| \ge 2$ 이다.

$g'(x)$ 연속이고,

$x<-2$ or $x>2$ 일 때 $g'(x) = \pm f(x)$, $f(x) \ge 0$ 이면서

$g'(2) = -1$, $g'(-2) = 3$ 이고 $g'(b) = 0$ 인 $x=b$ 극값 있으려면



이런 상황이어야 한다.

$\therefore$ k의 합 $= 0 + 2 + 2b - 2 = 2b$ 이므로 b를 구해야 한다.

$l(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ 이므로

$f(x) = m(x+2)(x-2) + l(x)$

$= mx^2 - \frac{1}{2}x - 4m + 2$ 이고

$b = \frac{1}{4m}$, $D = \frac{1}{4} - 4m(-4m+2)$

$= 16m^2 - 8m + \frac{1}{4} = 0$ 이다.

$\therefore 64m^2 - 32m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 64}}{64} = \frac{16 \pm 8\sqrt{3}}{64} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{8}$

$b = \frac{1}{4m} > 2 \Leftrightarrow m < \frac{1}{8}$ 이므로 $m = \frac{2-\sqrt{3}}{8}$ 이고 $2b = \frac{4}{2-\sqrt{3}} = 4(2+\sqrt{3}) = 8 + 4\sqrt{3}$

$\therefore p = 8,\ q = 4$ 이므로 $pq = 32$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt{4n^2+1}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{4n^2+3}+\sqrt{4n^2+1}}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$

24. 함수 $f(x)=e^x(2\sin x+\cos x)$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f'(x)=e^x(2\sin x+\cos x)+e^x(2\cos x-\sin x)$
$=e^x(\sin x+3\cos x)$
$\therefore f'(0)=1(0+3)=3$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$이 수렴할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n + 5\times 2^{n+1}}{2^n+3}$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{2^n}} = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n + 5\times 2}{1+\frac{3}{2^n}} = \frac{2+10}{1+0} = 12$

26. 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=2\log_b x$에 대하여

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=0$$

일 때, $a\times b$의 값은? (단, a와 b는 1보다 큰 상수이다.) [3점]

① $e^{\frac{1}{e}}$ ② $e^{\frac{2}{e}}$ ③ $e^{\frac{3}{e}}$ ④ $e^{\frac{4}{e}}$ ⑤ $e^{\frac{5}{e}}$

$f(e)-g(e)=0 \Leftrightarrow a^e = 2\log_b e$

$f'(e)-g'(e)=0 \Leftrightarrow \cancel{a^e}\ln a = \frac{2}{e\ln b} = \frac{2}{e}\cancel{\log_b e}$

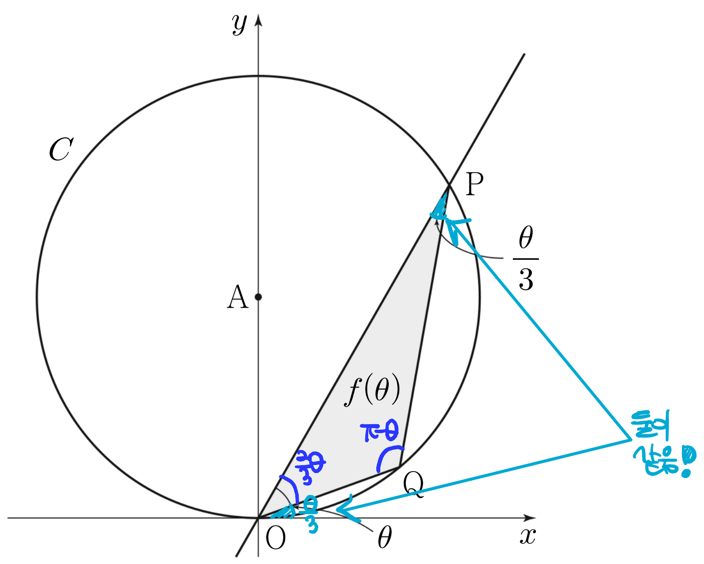
$\ln a = \frac{1}{e} \Leftrightarrow a = e^{\frac{1}{e}}$

$2\log_b e = a^e = e \Leftrightarrow b^{\frac{e}{2}} = e \Leftrightarrow b = e^{\frac{2}{e}}$

$\therefore a\times b = e^{\frac{3}{e}}$

\# 떨어진 두 넓이합 → 공통넓이인 부분 이용
\# 특수각 → 반지름 이용
\# 원위의 점 → 중심과 연결

27. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 A$(0, 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선이 원 C와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 호 OP 위에 점 Q를 $\angle \mathrm{OPQ} = \frac{\theta}{3}$가 되도록 잡는다. 삼각형 POQ의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, 점 Q는 제1사분면 위의 점이고, $0 < \theta < \pi$이다.) [3점]



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$\therefore \overline{OQ} = 2\sin\frac{\theta}{3}$, $\overline{PQ} = 2\sin\frac{2}{3}\theta$ ($\because$ sin법칙) 이므로

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2} \times \sin(\pi-\theta) \times 2\sin\frac{2}{3}\theta \times 2\sin\frac{\theta}{3}}{\theta \times \theta \times \theta}$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times 1 \times \cancel{2} \times \frac{2}{3} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

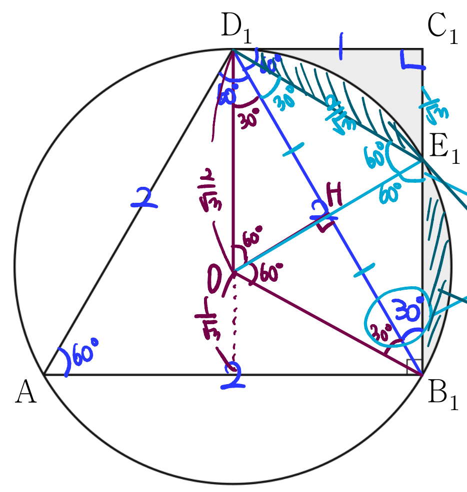
28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}} = 2$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{C_1D_1}} = 1$이고 $\angle \mathrm{C_1B_1A} = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$이 있다. 세 점 A, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{D_1}$을 지나는 원이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점 중 $\mathrm{B_1}$이 아닌 점을 $\mathrm{E_1}$이라 할 때, 두 선분 $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{C_1E_1}$과 호 $\mathrm{E_1D_1}$로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{B_1E_1}$과 호 $\mathrm{B_1E_1}$로 둘러싸인 부분인 ⌉ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 $\mathrm{AB_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 호 $\mathrm{E_1D_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{AD_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{B_2C_2}} : \overline{\mathrm{C_2D_2}} = \sqrt{3} : 1$이고 $\angle \mathrm{C_2B_2A} = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 점 $\mathrm{E_2}$를 잡고, 사다리꼴 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$에 ⌉ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [4점]

\# 풀이순서:

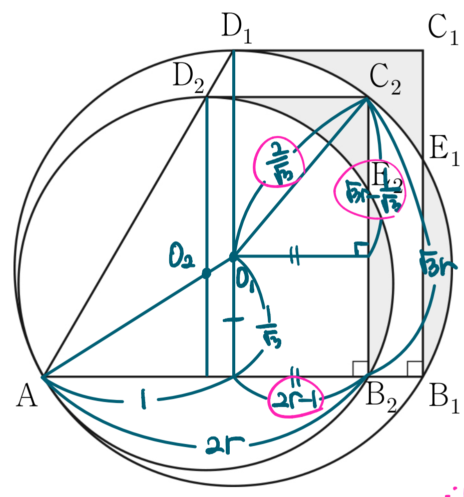
R_1



$\overline{OE_1} = \overline{OB_1}$이라 둘다 60°
즉, $\overline{OH}$와 $\overline{OE_1}$은 겹침.
↓
그래서 이 둘 넓이 같음

$\therefore S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

R_2



피타고라스

$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\sqrt{3}r - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (2r-1)^2$

$\frac{4}{3} = 3r^2 - 2r + \frac{1}{3} + 4r^2 - 4r + 1$

$7r^2 - 6r = 0$

$\therefore r = \frac{6}{7}$

길이비 $1 : r = 1 : \frac{6}{7}$

→ 넓이비 $1 : r^2 = 1 : \frac{36}{49}$

$\therefore \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1 - \frac{36}{49}} = \frac{49}{13} \times \frac{\sqrt{3}}{6}$

$= \frac{49}{78}\sqrt{3}$

⋮ ⋮

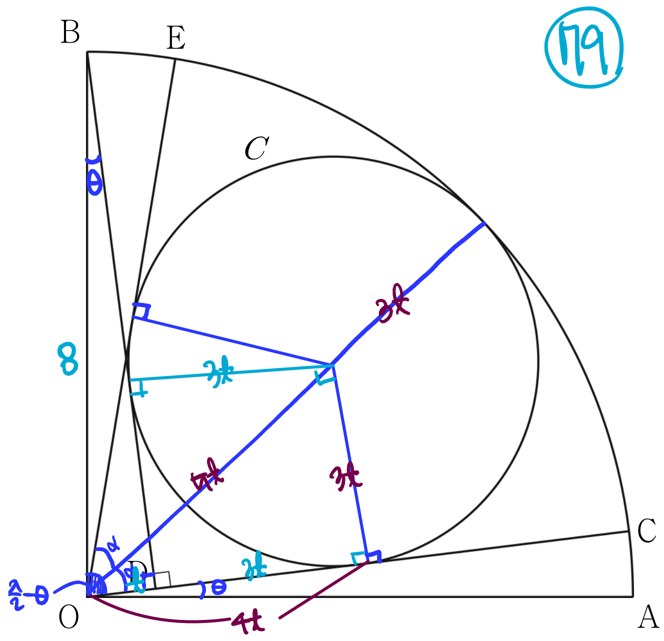
① $\frac{49}{144}\sqrt{3}$ ② $\frac{49}{122}\sqrt{3}$ ③ $\frac{49}{100}\sqrt{3}$ ④ $\frac{49}{78}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7}{8}\sqrt{3}$

접하면 수선의 발 내려서 표시해주기
미적분에서 삼각함수 합차 공식 출제 O
함수전체 미분가능이 아니면, 좌우미분계수 더할 수 있다.
자연수 n → 필요시 대입

단답형

29. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 점 B에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 두 선분 BD, CD와 호 BC에 동시에 접하는 원을 C라 하자. 점 O에서 원 C에 그은 접선 중 점 C를 지나지 않는 직선이 호 AB와 만나는 점을 E라 할 때, $\cos(\angle \mathrm{COE}) = \frac{7}{25}$이다. $\sin(\angle \mathrm{AOE}) = p + q\sqrt{7}$일 때, $200 \times (p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이고, 점 C는 점 B가 아니다.) [4점]

179



$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$= 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7}{25}$

$\therefore \sin^2\alpha = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$8t = 8$ 이므로 $t = 1$

$\therefore \sin\theta = \frac{t}{8} = \frac{1}{8}$

$\therefore \sin(\angle AOE) = \sin(2\alpha + \theta)$
$= \sin 2\alpha \cos\theta + \cos 2\alpha \sin\theta$
$= \frac{24}{25} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} + \frac{7}{25} \cdot \frac{1}{8}$
$= \frac{7 + 72\sqrt{7}}{200}$

$\therefore 200 \times (p+q) = 179$

30. $x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$
>
> (나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x+2) = -\frac{1}{2}f(x)$이다.

$x > 0$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = f'(x+) + f'(x-)$$

라 할 때,

$$\lim_{t \to 0+} \{g(n+t) - g(n-t)\} + 2g(n) = \frac{\ln 2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

107

$g(n+) - g(n-) + 2g(n) = \frac{\ln 2}{2^{24}}$ 인 n 찾기

(나) $f'(x+2) = -\frac{1}{2}f'(x)$ 이므로 $g(x+2) = -\frac{1}{2}g(x)$ 이다.

$f'(x) = \begin{cases} 2^x \ln 2 & (0 < x < 1) \\ -4 \cdot 2^{-x} \ln 2 & (1 < x < 2) \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 2^0 \ln 2 - 2 \cdot (-4 \cdot 2^{-1} \ln 2) = 3\ln 2 & (x=0) \\ 2 \times 2^x \ln 2 & (0 < x < 1) \\ -4 \cdot 2^{-1} \ln 2 + 2^1 \ln 2 = 0 & (x=1) \\ -8 \cdot 2^{-x} \ln 2 & (1 < x < 2) \\ -\frac{1}{2} \cdot 2^0 \ln 2 - 4 \cdot 2^{-2} \ln 2 = -\frac{3}{2}\ln 2 & (x=2) \end{cases}$

$h(n) = g(n+) - g(n-) + 2g(n)$ 이라 하면 $h(n+2) = -\frac{1}{2}h(n)$ 이고,

$\begin{cases} h(1) = -8 \cdot 2^{-1} \ln 2 - 2 \cdot 2^1 \ln 2 + 2 \cdot 0 = -8\ln 2 \\ h(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 \times 2^0 \ln 2 + 8 \cdot 2^{-2} \ln 2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \ln 2 = -2\ln 2 \end{cases}$ 이다.

$\therefore -2^3 \ln 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{27} = \frac{\ln 2}{2^{24}}$ 이므로 $n = 1 + 2 \times 27 = 55$ 이고,
$-2\ln 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{25} = \frac{\ln 2}{2^{24}}$ 이므로 $n = 2 + 2 \times 25 = 52$ 이다.

$\therefore 55 + 52 = 107$ 이다.

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.